



**UNIVERSITA' DEGLI STUDI DELLA BASILICATA**  
**Scuola di Ingegneria**



**Corso di**  
***TECNICA DELLE COSTRUZIONI***

**RICHIAMI DI STATICA**

Docente:  
**Prof. Ing. Angelo MASI**

Collaboratori:  
**Ing. Vincenzo MANFREDI**  
**Ing. Giuseppe VENTURA**

# ARGOMENTI

---

1. GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI
2. EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA
3. CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI E DELLE SOLLECITAZIONI
  - SOLUZIONE DI TRAVI ISOSTATICHE
4. GEOMETRIA DELLE AREE
  - SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE
5. CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI
6. SISTEMI IPERSTATICI
  - SOLUZIONE DI TRAVI IPERSTATICHE

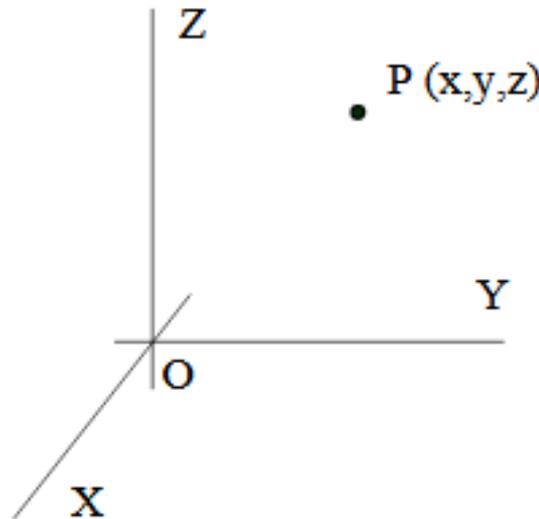
---

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

---

Se consideriamo un punto materiale **P** nello spazio, sappiamo che la sua posizione è definita, in modo univoco, da **3** grandezze scalari (le sue coordinate).



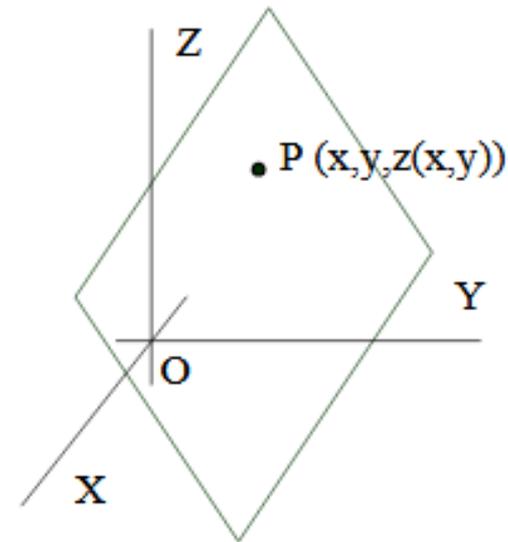
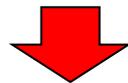
Si può affermare dunque che il punto nello spazio ha **3 gradi di libertà** in quanto, qualunque sistema di riferimento si consideri, la sua posizione è definita da tre coordinate indipendenti.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Se il punto materiale è **vincolato** a stare su di una superficie (ad es. un piano) i **gradi di libertà sono 2**.

In questo caso la condizione di appartenenza alla superficie può essere interpretata come una **limitazione** dei gradi di libertà del punto

$$ax + by + cz + d = 0$$

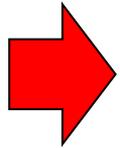


Tale **limitazione** è esprimibile analiticamente da un'equazione che lega le coordinate del punto (ad es. l'equazione del piano).

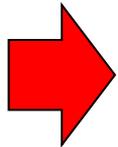
# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

---

I **vincoli** sono quindi condizioni (spesso esprimibili con equazioni) che **limitano i gradi di libertà** dei punti.



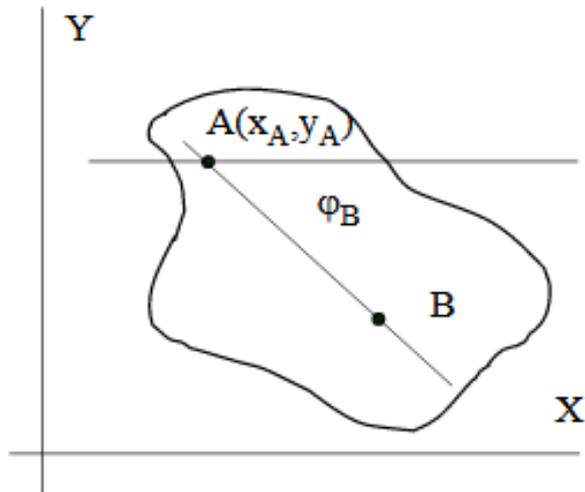
Passando da un punto materiale ad un sistema di **n** punti materiali, i gradi di libertà risultano in generale pari a **3n**.



Se consideriamo un sistema rigido si ha una notevole riduzione degli effettivi gradi di libertà. Questo è dovuto dalle **relazioni** esistenti tra le coordinate dei vari punti, la cui **distanza relativa è costante**.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Per individuare la posizione del corpo rigido **nel piano** basta considerare due punti arbitrari distinti **A** e **B**. Conoscendo le loro coordinate è possibile determinare le coordinate di qualsiasi altro punto del corpo



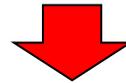
**Il corpo rigido nel piano ha 3 gradi di libertà.**

Fissando le coordinate  $(x_A, y_A)$  il punto B è **vincolato** a muoversi su una circonferenza attorno ad A. Quindi fissando anche la posizione angolare di B ( $\varphi_B$ ) si definisce univocamente la posizione del corpo.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

---

Per quanto appena detto consegue che : Un corpo rigido libero di muoversi nel piano presenta tre possibilità di spostamento, una **rotazione**, una **traslazione** lungo l'asse di riferimento **X** ed una **traslazione** lungo l'asse **Y**.

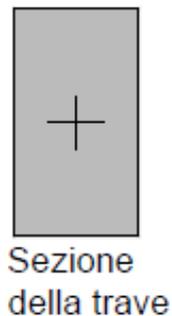


- Se il corpo non è completamente vincolato si dice **labile**.
- Se i vincoli sono necessari e sufficienti a fissare i gradi di libertà si dice che il corpo è **isostatico**.
- Se invece i vincoli sono eccessivi, il corpo si dice **iperstatico**.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

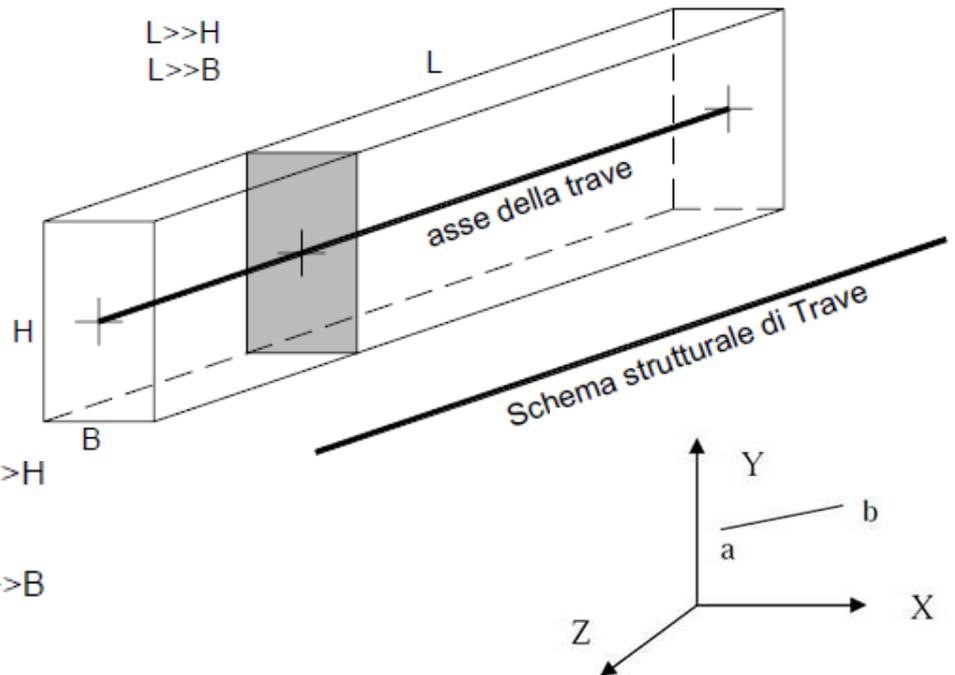
Considerando la **trave** come un particolare corpo rigido si può dunque affermare che una trave, libera di muoversi nel piano cartesiano, possiede tre possibilità di movimento (**tre gradi di libertà**) e cioè può traslare nella direzione dell'asse X (**Dx**), può traslare nella direzione dell'asse Y (**Dy**) e può ruotare nel piano XY (**Rz**).

una trave è schematizzata con un segmento coincidente con l'asse della trave reale.



Condizioni per adottare lo schema strutturale di trave

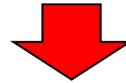
$$\left[ \begin{array}{l} L \gg H \\ L \gg B \end{array} \right.$$



# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

---

Al fine di mantenere in **equilibrio** un'asta (trave) o un sistema di aste su cui agiscono delle azioni esterne (forze e coppie) è necessario prevedere dei **vincoli**.



Dunque dal punto di vista **statico** (o delle forze) se un vincolo blocca uno spostamento allora può esercitare sulla trave un forza (**reazione vincolare**) in grado di opporsi a quello spostamento.

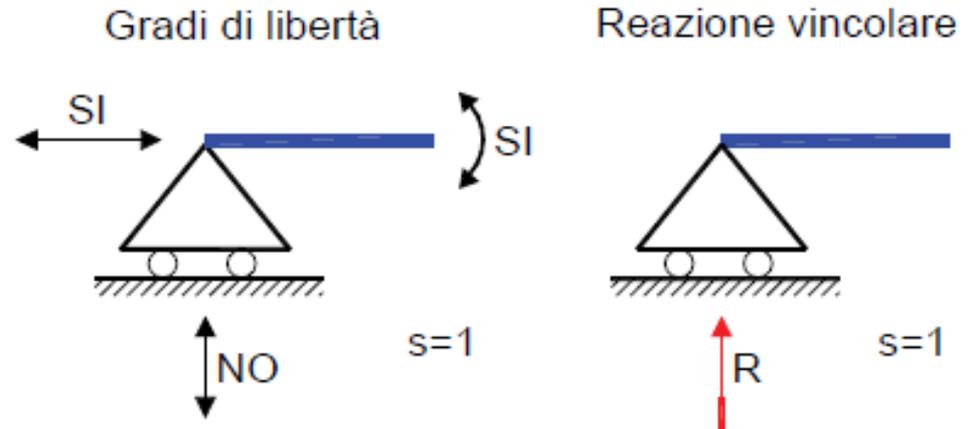
**Il vincolo si definisce:**

- **Semplice**, se esercita una sola reazione vincolare
- **Doppio**, se esercita due reazioni vincolari
- **Triplo**, se esercita tre reazioni vincolari



# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

## II CARRELLO vincolo semplice

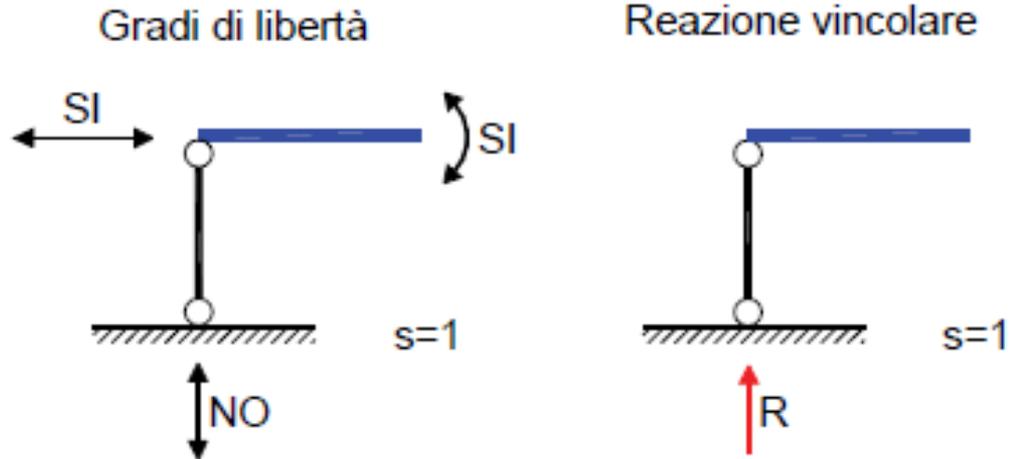


Un tratto di trave libero da un estremo e vincolato all'altro estremo con un carrello, **conserva la sua capacità di ruotare e di traslare solo lungo il piano di scorrimento del carrello ( $s=1$ ).**

Dal punto di vista statico il carrello, **impedendo la traslazione lungo l'asse perpendicolare al piano di scorrimento**, deve essere in grado di esercitare una reazione vincolare **R** proprio **lungo tale direzione**.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

## II PENDOLO vincolo semplice

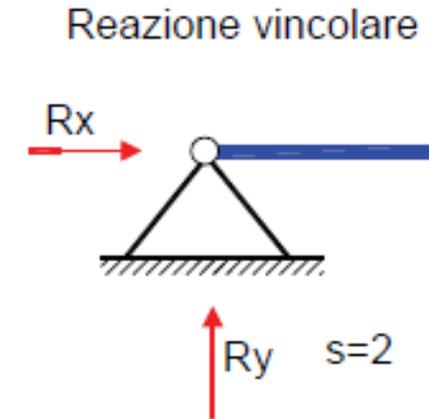
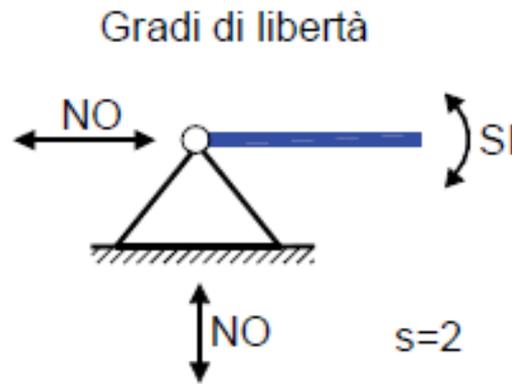


Blocca solo il grado di libertà relativo allo spostamento lungo la direzione dell'asse del pendolo ( $s=1$ ). Resta consentita la rotazione dell'asta e la traslazione lungo la direzione perpendicolare all'asse del pendolo

Dal punto di vista delle forze un pendolo è in grado di esercitare **solo una reazione vincolare** che agisce nella direzione dell'asse del **R**.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

## LA CERNIERA vincolo doppio

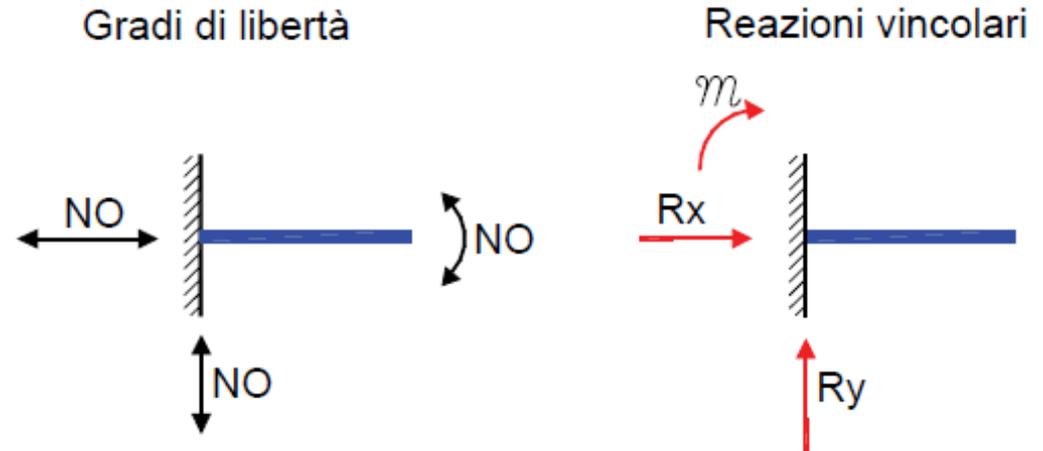


la cerniera è un vincolo doppio in quanto **blocca entrambi le traslazioni** lungo gli assi coordinati di riferimento lasciando libera la sola rotazione del tratto di trave collegata ( $s=2$ ).

Dal punto di vista statico la cerniera è in grado di esercitare sulla trave due reazioni vincolari, una parallela all'asse Y ( $R_y$ ) e una all'asse X ( $R_x$ ).

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

**L'INCASTRO  
vincolo triplo**



L'incastro è un vincolo che è in grado di bloccare entrambe le traslazioni ed anche la rotazione dell'estremo della trave ad esso collegato ( $s=3$ ).

Dal punto di vista delle forze l'incastro deve esercitare le due reazioni vincolari **Rx** ed **Ry** e anche una reazione vincolare caratterizzata da una coppia **m**.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

	Dx	Dy	Rz	Totale g.d.l. eliminati
<b>CARRELLO</b>	NO	SI	NO	1
<b>CERNIERA</b>	SI	SI	NO	2
<b>INCASTRO</b>	SI	SI	SI	3
<b>PENDOLO</b>	NO	SI	NO	1
<b>BIPENDOLO</b>	NO	SI	SI	2

SI: g.d.l. vincolato

NO: g.d.l. non vincolato

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

---

Al fine di analizzare la statica di un'asta (trave) caricata da un sistema di forze, per prima cosa bisogna stabilire se l'asta che si sta studiando è **labile**, **isostatica** oppure **iperstatica**.

- **Un'asta è labile** se il numero di gradi di libertà (g.d.l.) vincolati è minore del numero di gradi libertà dell'asta stessa.
- **Un'asta è isostatica** se il numero di g.d.l. vincolati è uguale al numero dei suoi g.d.l.
- **Un'asta è iperstatica** se il numero di g.d.l. vincolati supera il numero dei suoi g.d.l.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

---

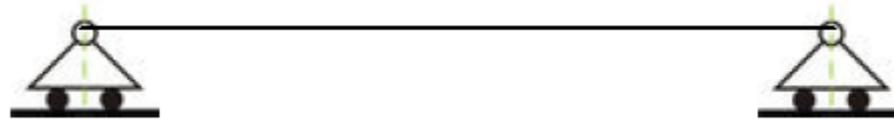
In base alle precedenti definizioni e sapendo che un'asta presenta 3 g.d.l. nel piano, si può ricavare una semplice espressione per stabilire se un'asta è **labile**, **isostatica** o **iperstatica**:

- **trave labile**  $3t-s > 0$
- **trave isostatica**  $3t-s = 0$
- **trave iperstatica**  $3t-s < 0$

Dove **t** è il numero di tratti elementari di cui è costituita l'asta mentre **s** è il numero di g.d.l. vincolati.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

## Esempio: trave con due carrelli



- Abbiamo un solo tratto ( $t=1$ ), quindi  $3t=3$
- Il numero di g.d.l. eliminato è pari a 2 (2 carrelli), quindi  $s=2$

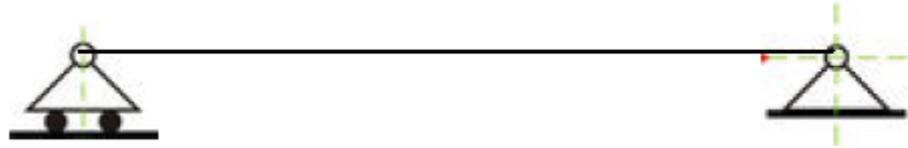


$$3t - s = 1$$

La trave è **labile**, infatti applicando una forza orizzontale è evidente che il sistema sarebbe in grado di muoversi in direzione orizzontale.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

## Esempio: trave con carrello e cerniera



- Abbiamo ancora un solo tratto, quindi  $3t=3$
- Il numero di g.d.l. eliminato è pari a 3 (1 carrello e 2 cerniera) quindi  $s=3$

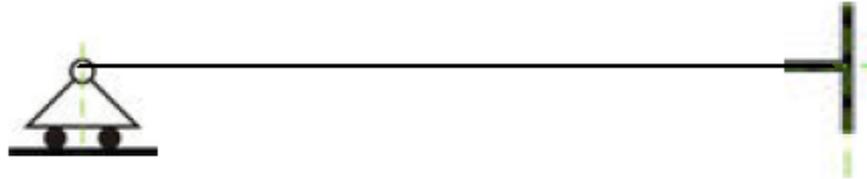


$$3t-s = 0$$

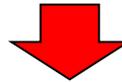
La trave è **isostatica** ovvero è in grado di rimanere in equilibrio sotto un sistema di forze esterne.

# GRADI DI LIBERTÀ E VINCOLI

Esempio: trave con carrello e incastro



- Abbiamo un solo tratto, quindi  $3t=3$
- Il numero di g.d.l. eliminato è pari a 4 (1 carrello e 3 incastro) quindi  $s=-1$



$$3t-s = -1$$

La trave è una volta **ipersatica** ovvero ha un numero di vincoli ridondante.

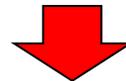
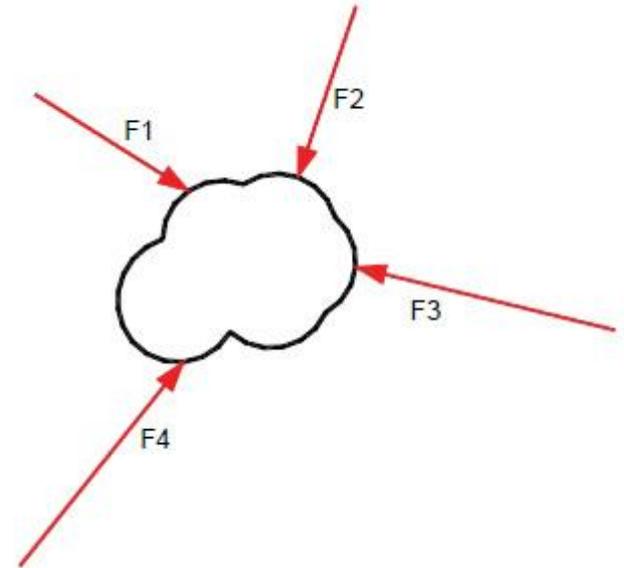
---

# EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

# EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

Un corpo rigido libero di muoversi nel piano soggetto ad un sistema di forze, **resta in equilibrio** (non subisce spostamenti) **se il sistema di forze che lo sollecita è un sistema equilibrato**.

Si ricorda che un sistema di forze  $\mathbf{F}_i$  si dice equilibrato quando presenta risultante nulla ( $\mathbf{R}=0$ ) e momento risultante nullo ( $\mathbf{M}=0$ ) rispetto ad un qualunque punto del piano



**dal punto di vista analitico**

# EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

---

1) la risultante delle forze applicate dovrà essere nulla:

$$\mathbf{r} = \sum_i \mathbf{f}_i = \mathbf{0}$$

$\mathbf{f}_i$  = forza generica (anche le reazioni vincolari sono forze)

2) la risultante dei momenti delle forze e delle coppie applicate deve essere nulla

$$\mathbf{M}_o = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$$

$\mathbf{M}_o$  è la sommatoria di tutte le coppie  $\mathbf{c}_j$  e di tutti i momenti generati dalle forze  $\mathbf{f}_i$  agenti con braccio  $\mathbf{r}_i$  rispetto al polo  $\mathbf{O}$

# EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

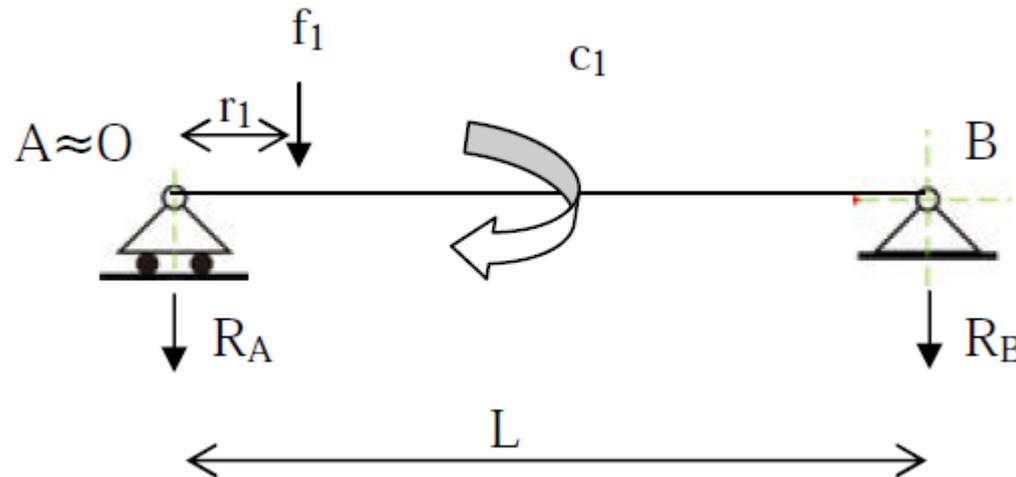
---

La 1) e la 2) rappresentano le **equazioni cardinali della statica** ed esprimono la condizione di equilibrio di un corpo rigido soggetto ad un sistema di forze.

- La prima equazione esprime **l'equilibrio alla traslazione** lungo le due direzioni (**X,Y**) del sistema di riferimento considerato
- La seconda equazione esprime **l'equilibrio alla rotazione** intorno ad un punto arbitrario **O** del piano.

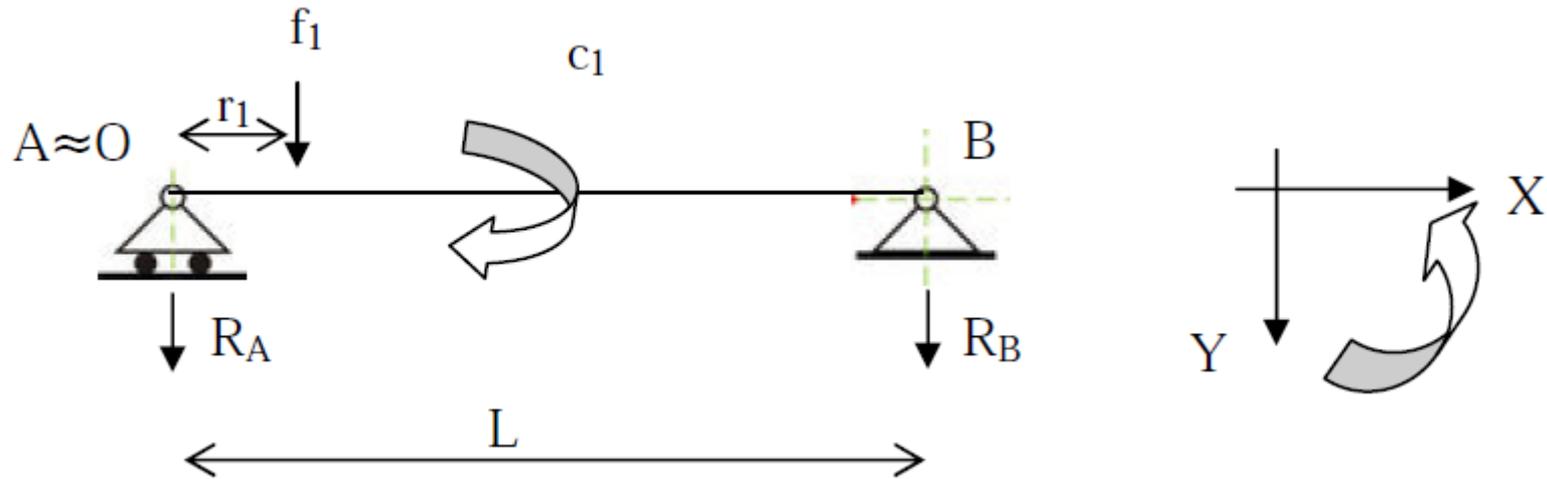
# EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA

**Caso elementare:** trave doppiamente appoggiata caricata da una forza ed una coppia.



Il polo  $O$  viene assunto coincidente con l'appoggio di sinistra  $A$ , ovvero il carrello.

# EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA



Le equazioni precedenti diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = \sum_i \mathbf{f}_i = 0 \\ \mathbf{M}_o = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{c}_j = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_1 + R_A + R_B = 0 \\ -f_1 \cdot r_1 - c_1 - R_B \cdot L = 0 \end{array} \right.$$

Un sistema di due equazioni nelle due incognite  $R_A$  ed  $R_B$

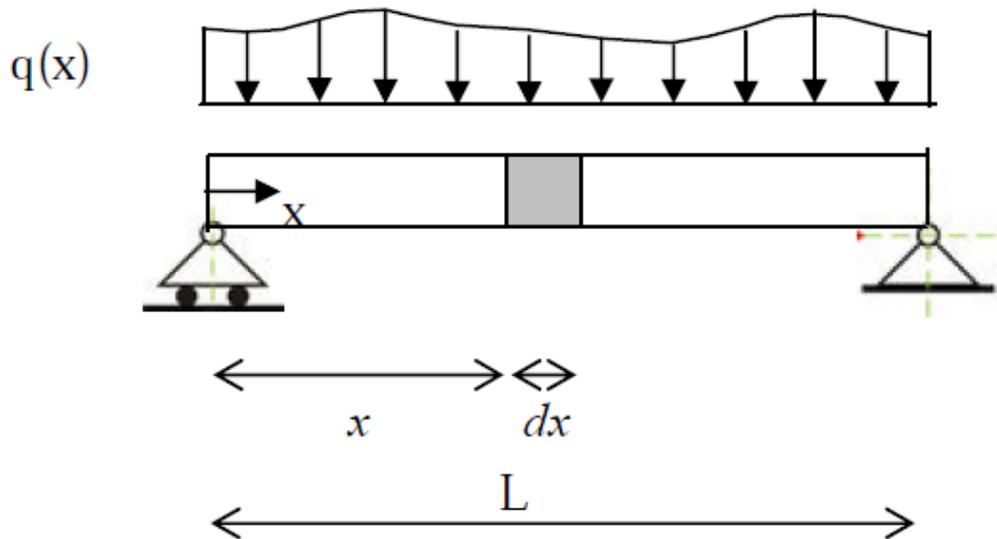
---

# **CALCOLO DELLE REAZIONI VINCOLARI E DELLE SOLLECITAZIONI**

# REAZIONI VINCOLARI E SOLLECITAZIONI

In una trave genericamente vincolata e caricata insorgono delle sollecitazioni interne quali **taglio**, **momento flettente**, **sforzo assiale** e **torsione**.

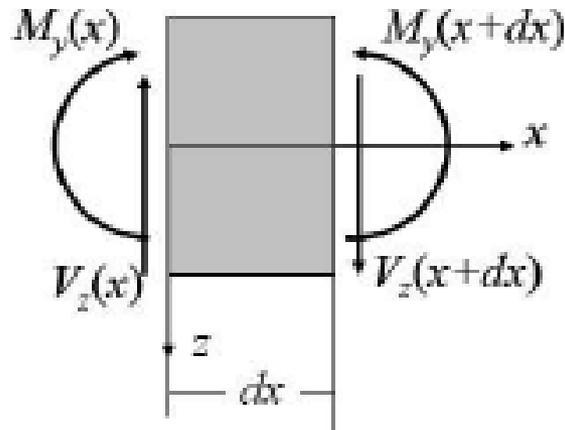
Consideriamo il seguente schema di trave, soggetta ad un carico distribuito  $q(x)$ , e immaginiamo di estrarre un concio elementare  $dx$



Con un carico distribuito  $q(x)$  avremo solo taglio e momento flettente

# REAZIONI VINCOLARI E SOLLECITAZIONI

Il concio elementare  $dx$  sarà in equilibrio, sotto le azioni esterne, grazie alle sollecitazioni interne.



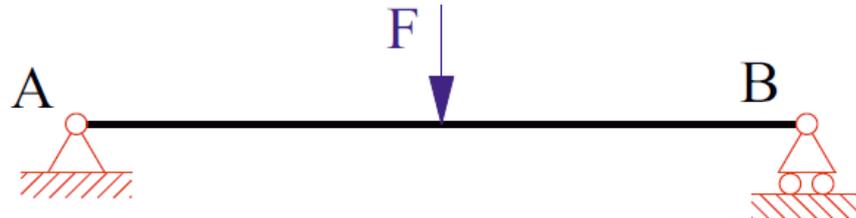
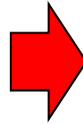
Il momento flettente si considera positivo, per convenzione, se tende le fibre inferiori.

Il taglio sul concio è positivo se induce una rotazione dello stesso in senso orario.

- sulla **faccia di sinistra** il taglio positivo è rappresentato da una forza diretta verso l'alto
- sulla **faccia di destra** il taglio positivo equivale ad una forza diretta verso il basso.

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

**PROBLEMA**

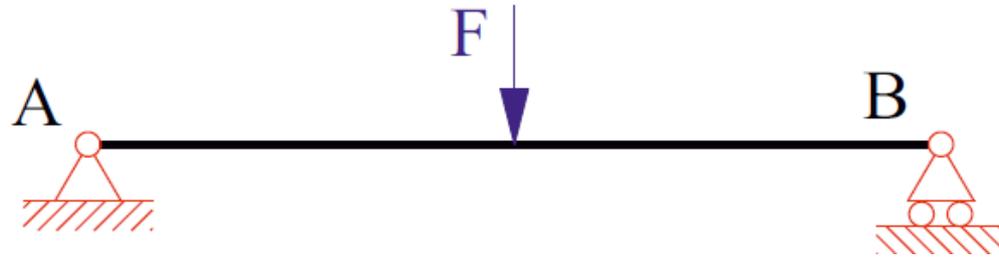


**SOLUZIONE**

- Riconoscere i **vincoli** e i gradi di libertà bloccati (**s**)
- Riconoscere se la struttura è **isostatica** (ovvero se è labile o iperstatica)
- Calcolo delle Reazioni Vincolari (**R**, **m**)
- Calcolo delle Sollecitazioni (**N**, **V**, **M**)

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Si consideri il caso in cui una trave **appoggiata – appoggiata** (in **A** e **B**) è soggetta ad una forza concentrata verticale di intensità **F** in mezzeria

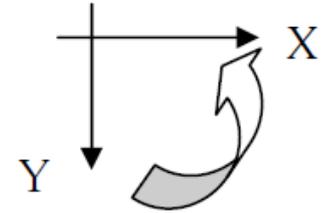
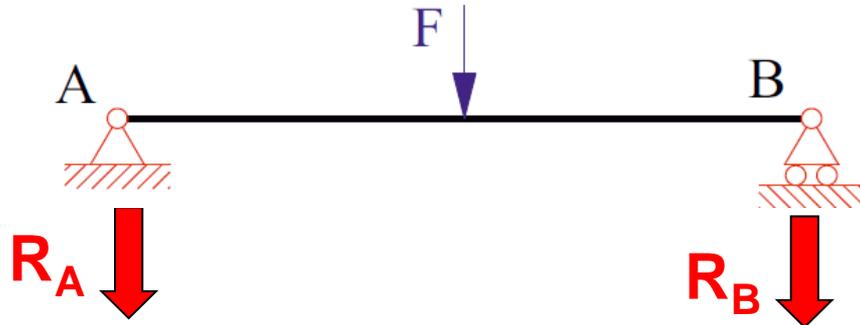


La quantità  $q=3t-s$  vale  $q=3-3$ , i vincoli sono ben disposti e quindi il sistema è **isostatico**.

Applichiamo le equazioni cardinali della statica per determinare le reazioni vincolari

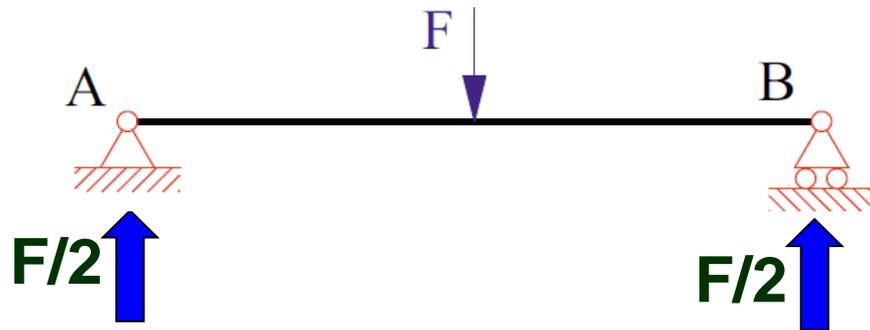
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = \sum_i \mathbf{f}_i = 0 \\ \mathbf{M}_o = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{c}_j = 0 \end{array} \right.$$

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE



$$\left\{ \begin{array}{l} R_A + R_B + F = 0 \\ -R_B \cdot L - F \cdot L/2 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} R_A = F/2 \\ R_B = F/2 \end{array} \right.$$

(diretta verso l'alto)  
(diretta verso l'alto)

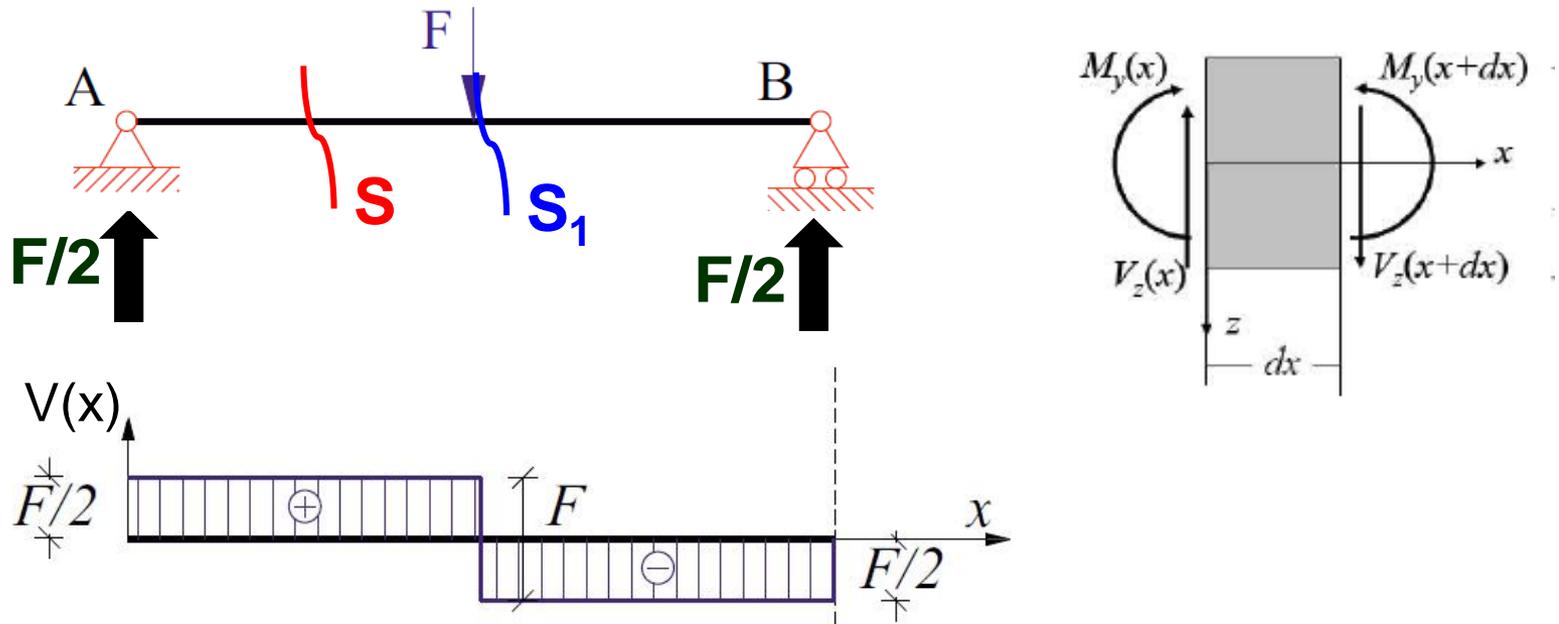


**Reazioni Vincolari**

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

## Diagramma del Taglio

In una sezione generica **S** la caratteristica della sollecitazione  $V_S$  si può determinare come somma di tutte le forze agenti a destra o sinistra di **S**.



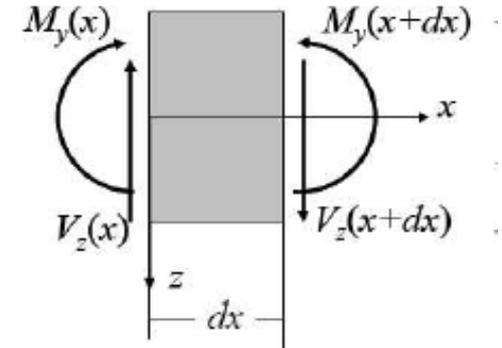
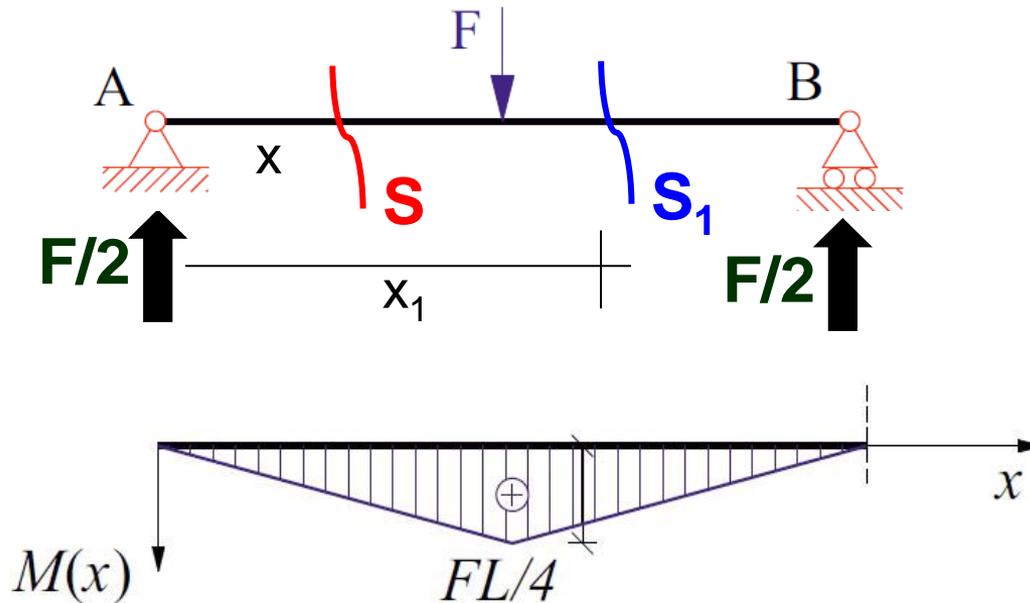
$$V(S) = F/2 \text{ (costante fino a } x=L/2)$$

$$V(S_1) = F/2 - F = -F/2 \text{ (costante fino a } x=L)$$

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

## Diagramma del Momento Flettente

In una sezione generica **S** la caratteristica della sollecitazione  $V_S$  si può determinare come somma di tutte le forze agenti a destra o sinistra di **S**.



$$M(S) = F/2 \cdot X = (\text{lineare})$$

$$M(S_1) = F/2 \cdot X_1 - F \cdot (X_1 - L/2) = (\text{lineare})$$

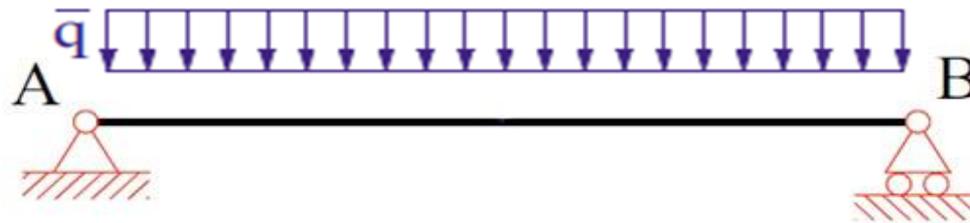
$$M(A) = 0$$

$$M(B) = 0$$

$$M(L/2) = F \cdot L/4$$

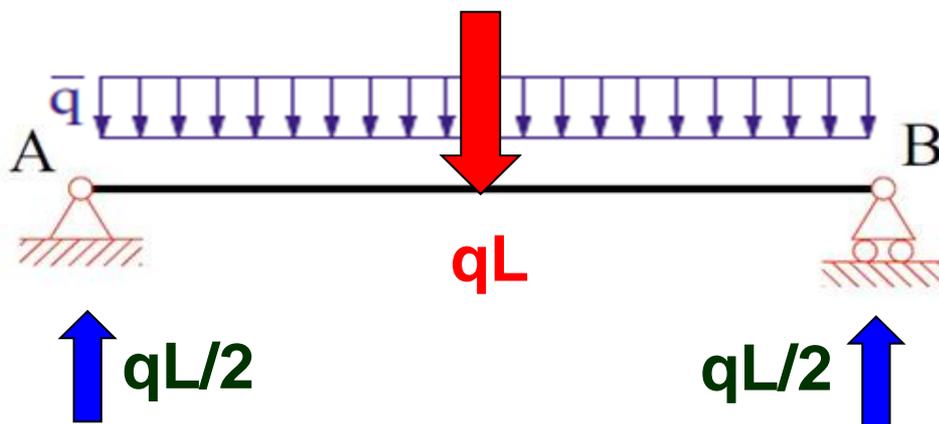
# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Si consideri il caso in cui una trave **appoggiata** – **appoggiata** (in **A** e **B**) è soggetta ad un carico distribuito **q**



$$q=3t-s=0$$

Per ricavare le reazioni vincolari sostituiamo il carico con la risultante **F=q\*L** applicata nel suo baricentro.



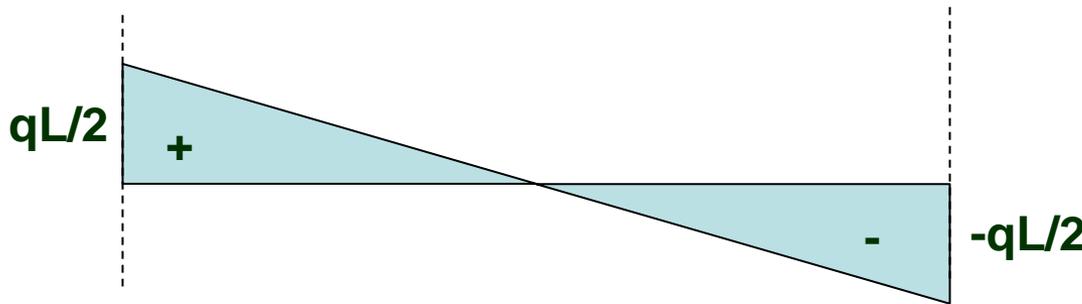
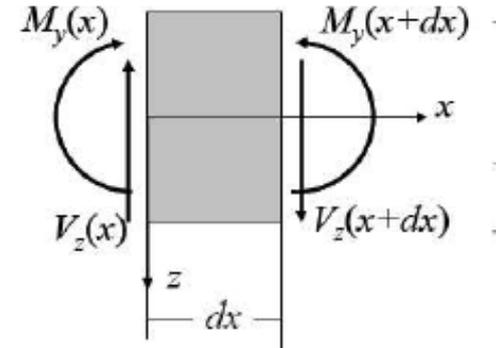
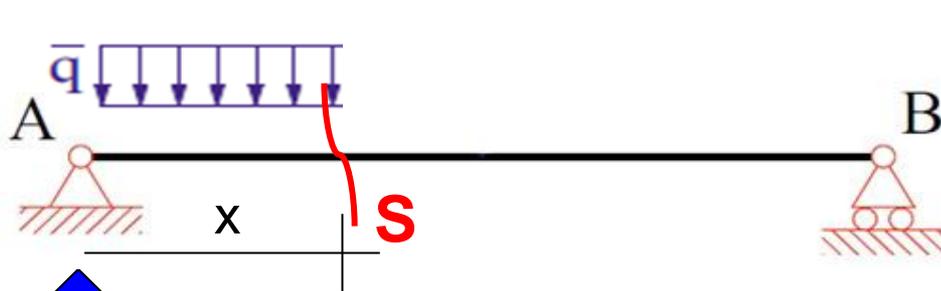
Per analogia con la trave caricata da una forza in mezzeria

$$R_A = R_B = -F/2 = -qL/2$$

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

## Diagramma del Taglio

Alla generica sezione **S** valutiamo la caratteristica della sollecitazione  $V_S$  come somma di tutte le forze agenti a sinistra di **S**.

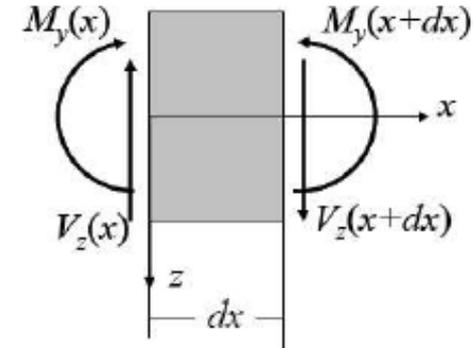
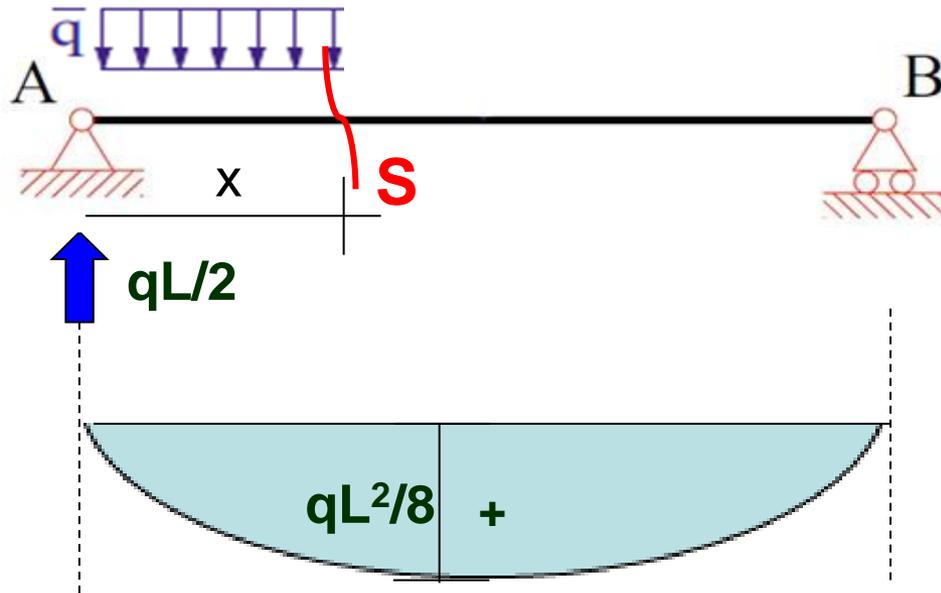


**Funzione lineare tra  $qL/2$  e  $-qL/2$**

$$\left\{ \begin{array}{l} V(0) = qL/2 \\ V(x) = qL/2 - qx \\ V(L) = -qL/2 \end{array} \right.$$

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

## Diagramma del Momento Flettente



La derivata si annulla in mezzeria e dunque a  $L/2$  il momento è massimo

$$dM/dx = L - 2x = 0$$

  
 $x = L/2$

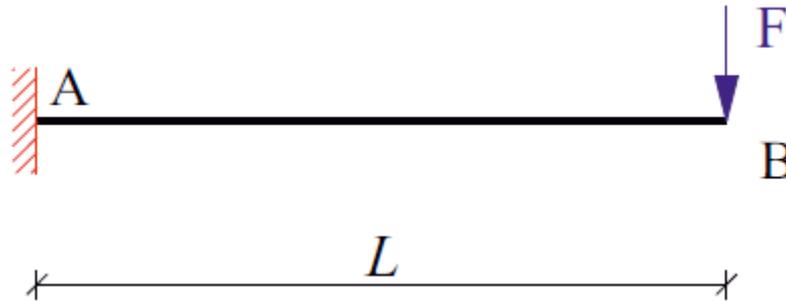
$$M(0) = M(L) = 0$$

$$M(x) = q \cdot x \cdot L/2 - q \cdot x \cdot x/2 = q/2 (L \cdot x - x^2)$$

$$M(L/2) = qL^2/8$$

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Si consideri il caso in cui una trave (**a mensola**) incastrata nel punto **A** è soggetta ad una forza concentrata verticale di intensità **F** nell'estremo libero **B**

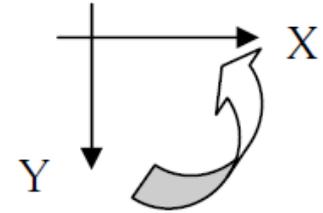
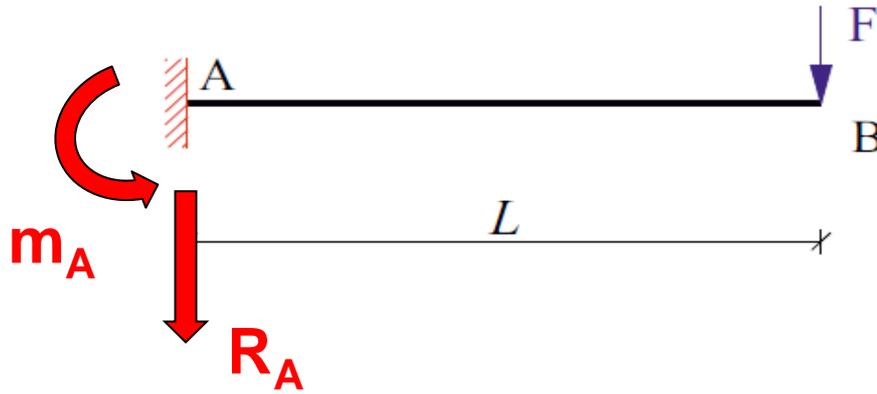


La quantità  $q=3t-s$  vale  $q=3-3$ , i vincoli sono ben disposti e quindi il sistema è **isostatico**.

Applichiamo le equazioni cardinali della statica per determinare le reazioni vincolari

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r} = \sum_i \mathbf{f}_i = 0 \\ \mathbf{M}_o = \sum_i \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{c}_j = 0 \end{array} \right.$$

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

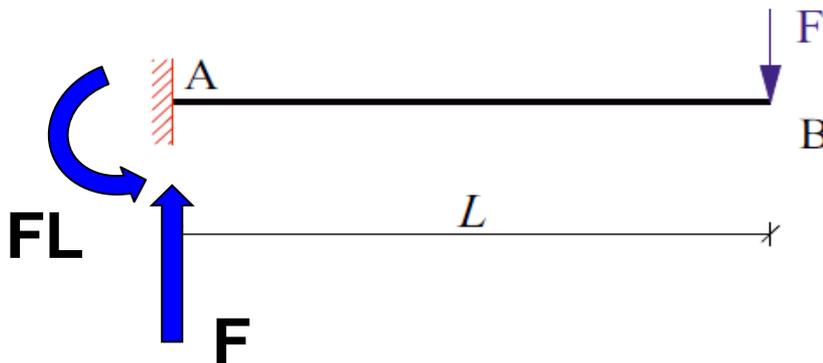


$$\left\{ \begin{array}{l} R_A + F = 0 \\ m_A - F \cdot L = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_A = -F \\ m_A = F \cdot L \end{array} \right.$$

(diretta verso l'alto)

(in senso antiorario)



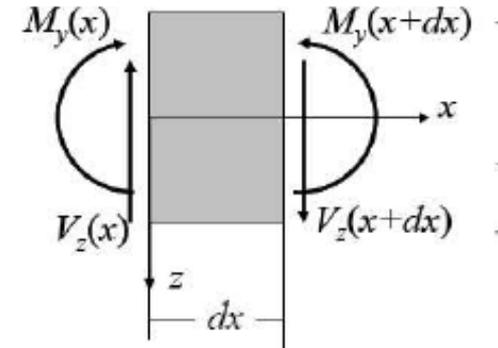
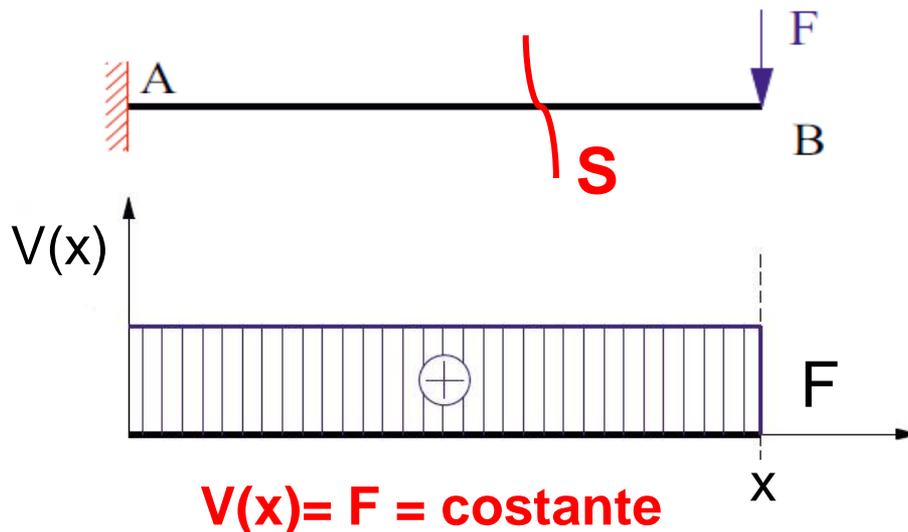
**Reazioni  
Vincolari**

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

## Diagramma del Taglio

Fissando un sistema di riferimento con origine nel punto **A** si determina la caratteristica della sollecitazione in corrispondenza della sezione generica **S**.

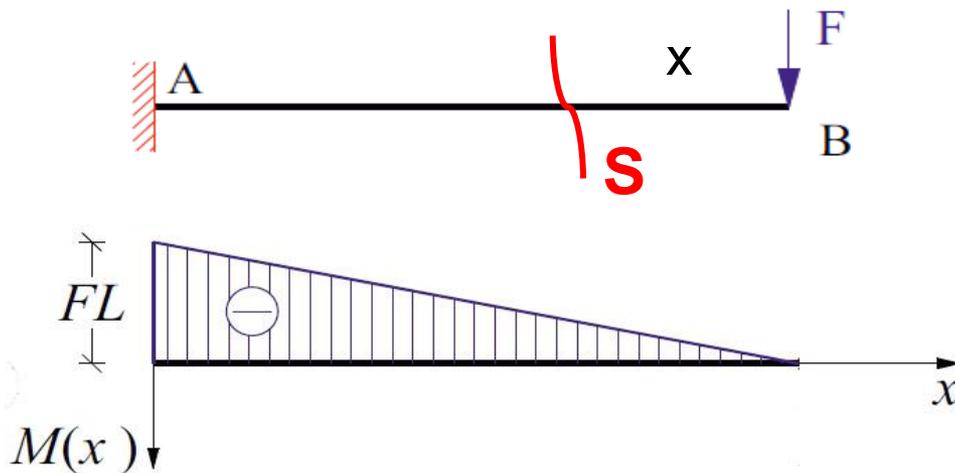
Considerando le forze a destra di **S**, il verso della caratteristica della sollecitazione  $V_S$  è quello positivo (faccia destra del concio)



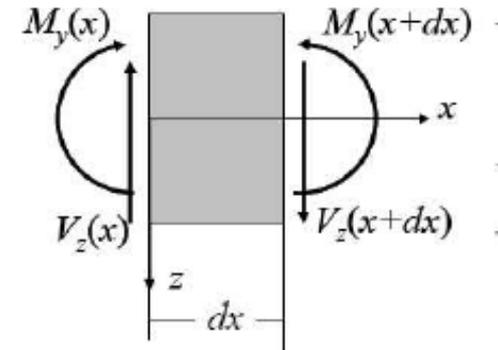
# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

## Diagramma del Momento Flettente

Considerando sempre il sistema di riferimento con origine in **A** si determinare la caratteristica della sollecitazione nella sezione generica **S**. Il verso di  $M_S$  è negativo (faccia destra del concio )



$M(x) =$  funzione lineare tra 0 e L



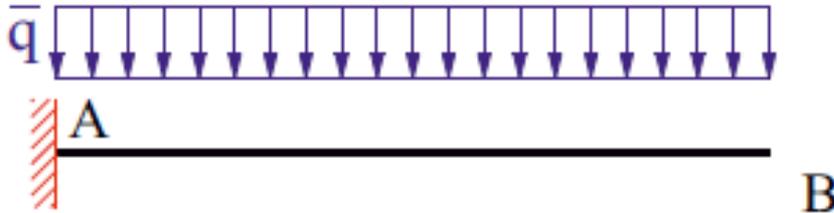
$$M(s) = -F \cdot x$$

$$M(B) = 0$$

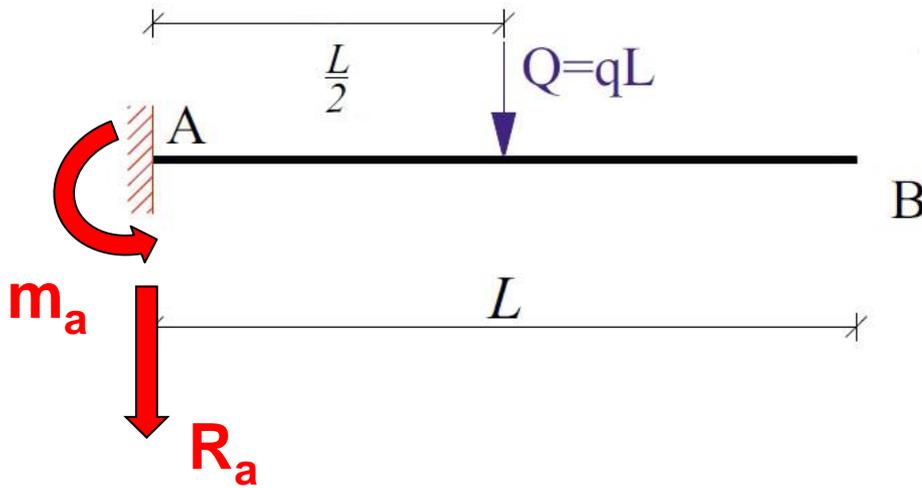
$$M(A) = -F \cdot L$$

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

Si consideri ancora lo schema di trave a mensola soggetta ad un carico distribuito di intensità  $q$



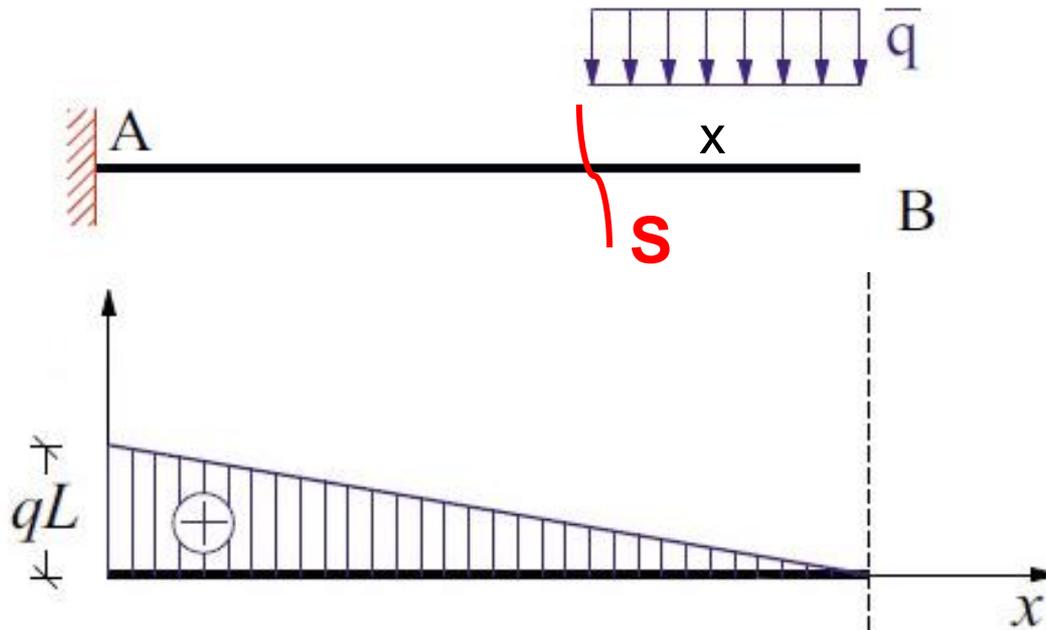
*equazioni cardinali della statica*



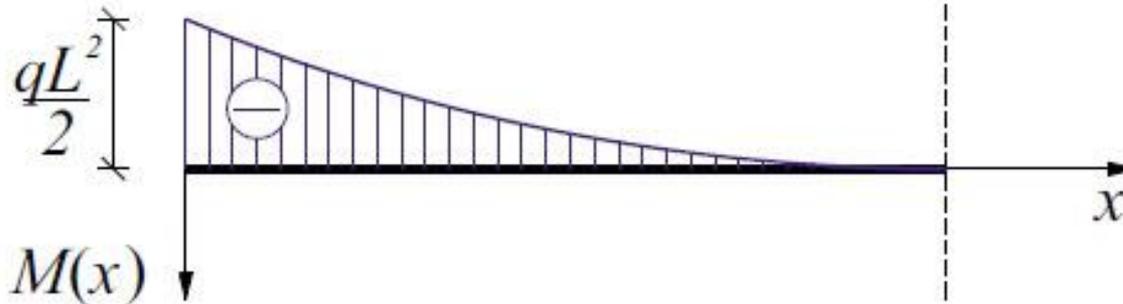
$$\left\{ \begin{array}{l} m_a - q \cdot L \cdot L/2 = 0 \\ R_A + q \cdot L = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} m_a = q/2 \cdot L^2 \\ R_A = - q \cdot L \end{array} \right.$$

$R_A$  è diretta verso l'alto

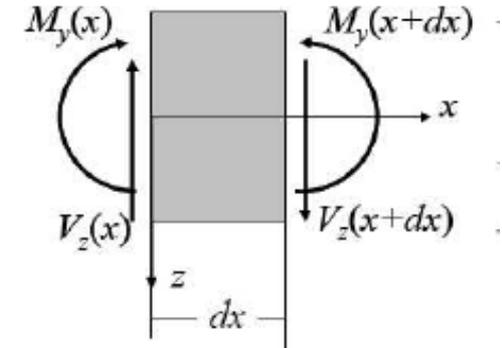
# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE



$V(x)$  = funzione lineare tra 0 e L



$M(x)$  = funzione quadratica tra 0 e L



$$V(s) = -q \cdot x$$

$$V(B) = 0$$

$$V(A) = -q \cdot L$$

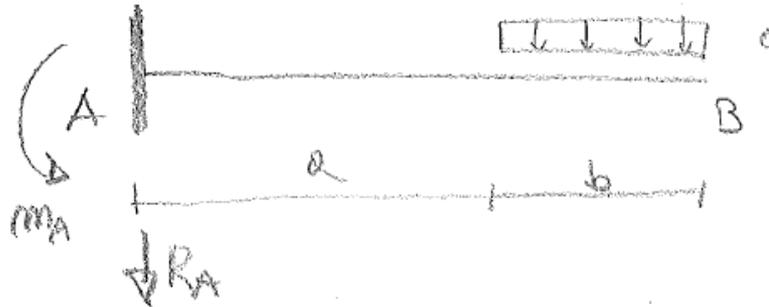
$$M(s) = -\frac{q}{2} \cdot x^2$$

$$M(B) = 0$$

$$M(A) = -\frac{q}{2} \cdot L^2$$

# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

## Trave incastrata con carico distribuito (q) parziale



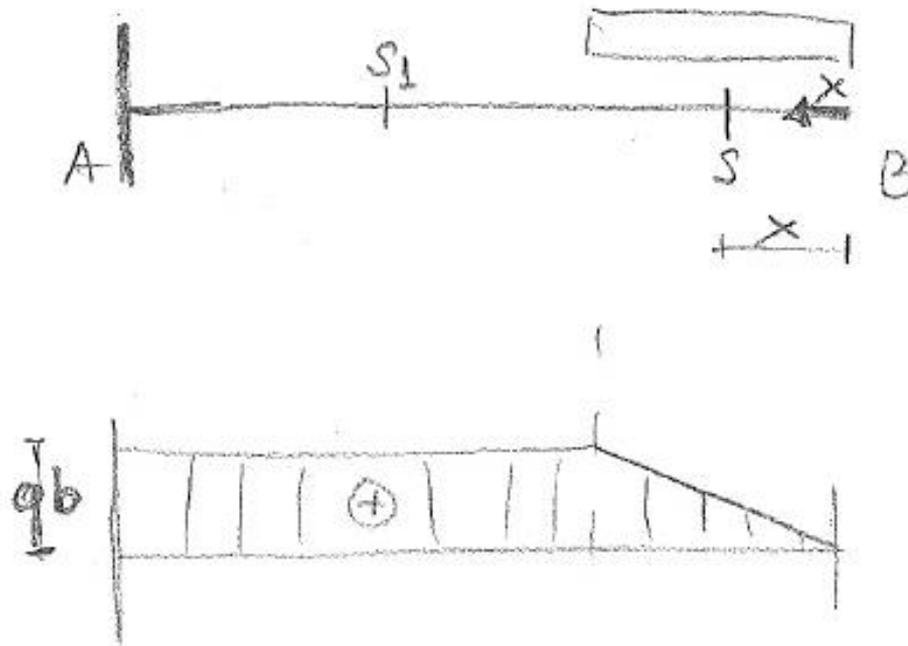
IL CARICO  $q$  È STATO  
SOSTITUITO DA UNA FORZA  
CONCENTRATA PARI A  $q \cdot b$

REAZIONI  
VINCOLARI

$$\begin{cases} M_A - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) = 0 \\ R_A + qb = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} M_A = qb\left(a + \frac{b}{2}\right) \\ R_A = -qb \end{cases}$$

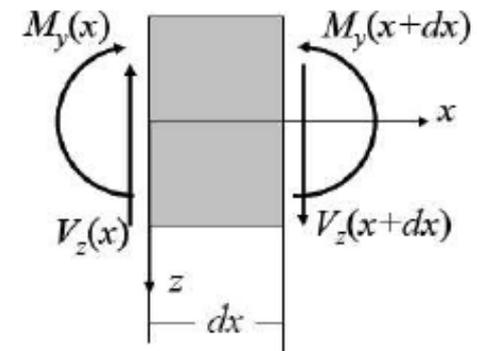
# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

## Diagramma del Taglio



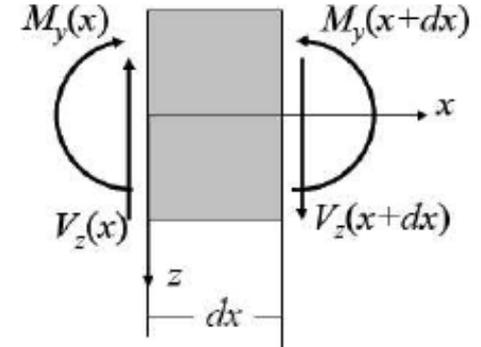
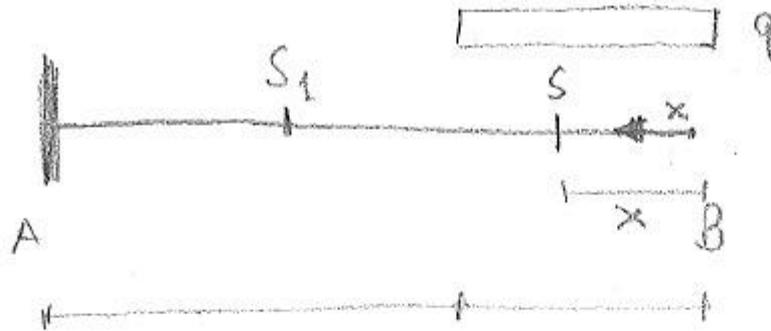
$$T(s) = qx \quad 0 < x < b$$

$$T(s_1) = qb \quad x > b$$



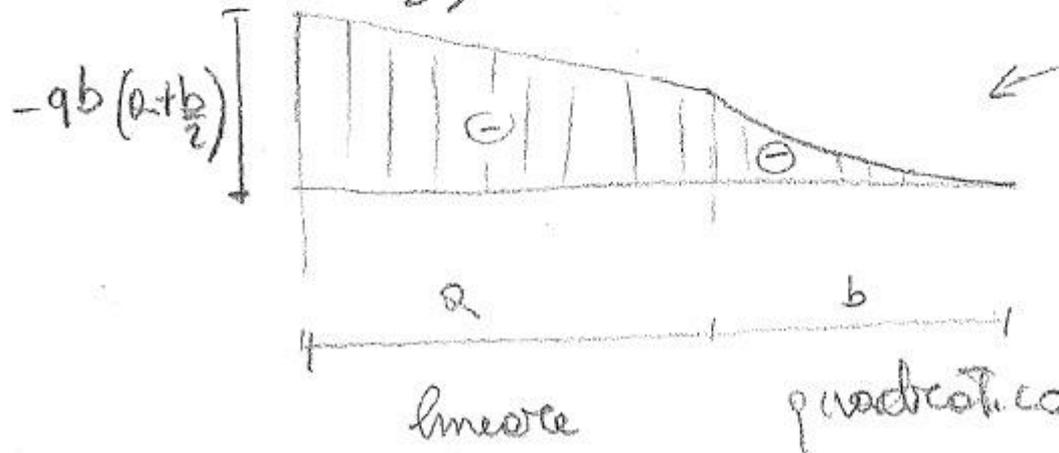
# SOLUZIONI DI TRAVI ISOSTATICHE

## Diagramma del Momento Flettente



$$M(s) = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -q \frac{x^2}{2} \quad 0 < x < b$$

$$M(s_1) = -qb \left(x - \frac{b}{2}\right) \quad x > b$$



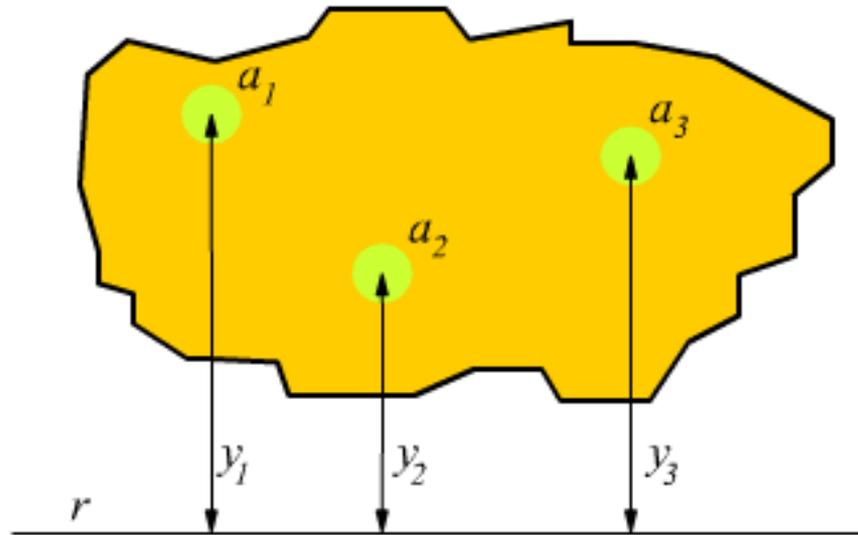
← Tensione & fibre superiori (negativa)

---

# GEOMETRIA DELLE AREE

## Momento STATICO (o di primo ordine)

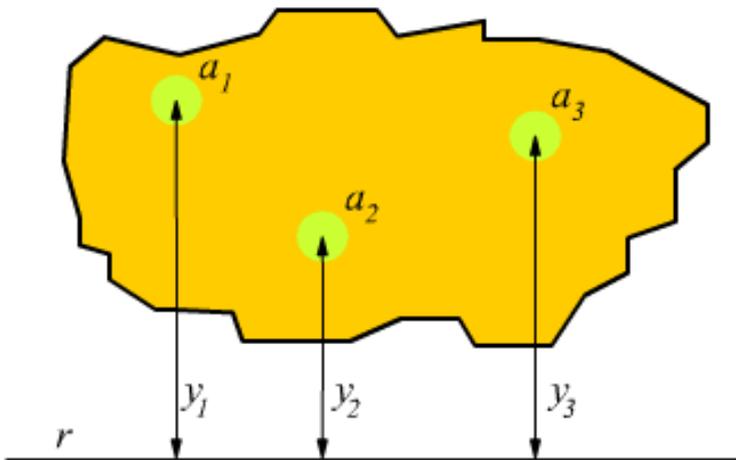
Ipotizziamo una generica superficie di area  $A$  e supponiamo che questa possa essere suddivisa in tante piccole aree elementari  $a_i$



ipotizziamo, inoltre, una retta  $r$  complanare con la superficie data.

# GEOMETRIA DELLE AREE

Si definisce **momento statico S** della superficie assegnata rispetto alla retta **r**, la somma algebrica dei prodotti delle aree elementari **a<sub>i</sub>** per le rispettive distanze **y<sub>i</sub>** dalla retta **r**

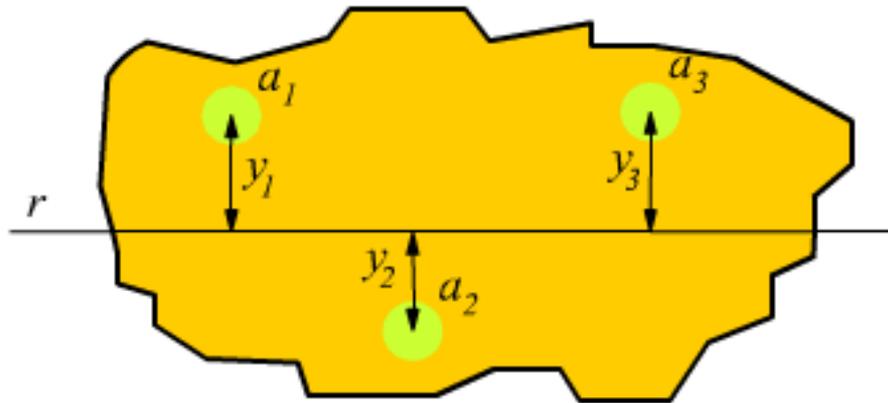


$$S = \sum_i a_i y_i \quad [L^3]$$

Il momento statico può assumere valori negativi, positivi o nulli in relazione alla posizione della retta rispetto la superficie. **Il momento statico è positivo quando la retta è esterna alla superficie**

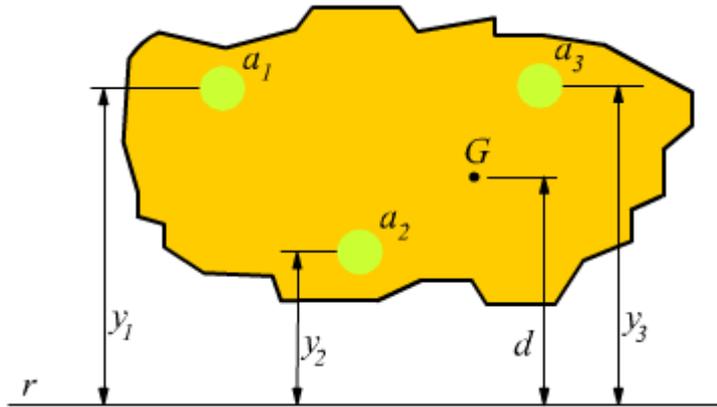
# GEOMETRIA DELLE AREE

Il momento statico può risultare **negativo** quando la retta interseca la superficie ed i prodotti negativi sono più numerosi dei prodotti positivi. **Il momento statico è nullo quando i prodotti negativi uguagliano quelli positivi.**



Il momento statico di un sistema di forze rispetto a un punto o un asse è equivalente al **momento statico** della **risultante** dello stesso sistema di forze rispetto allo stesso punto o asse (**teorema di Varignon o dei momenti**)

# GEOMETRIA DELLE AREE



$$S = \sum_i a_i y_i = Ad$$

**A** : area totale della superficie

**d** : distanza del baricentro della superficie G e la retta considerata

Se il momento statico, valutato rispetto alla retta **r**, si annulla

$$\sum_i a_i y_i = 0 \longrightarrow Ad = 0$$

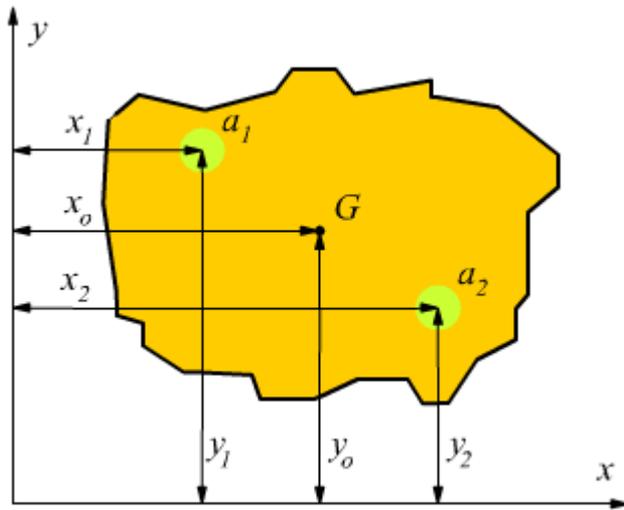
La relazione può essere soddisfatta solo per **d=0** quindi la retta **r** passa per il baricentro della figura piana.



*Il momento statico di una superficie calcolato rispetto ad un qualsiasi asse baricentrico ha valore nullo*

# GEOMETRIA DELLE AREE

Questo dato può essere usato per la determinazione analitica del baricentro di una figura piana



Consideriamo un sistema di assi cartesiani di riferimento e calcoliamo i momenti statici rispetto all'asse **x** e all'asse **y**

$$S_x = \sum_i a_i y_i \quad S_y = \sum_i a_i x_i$$

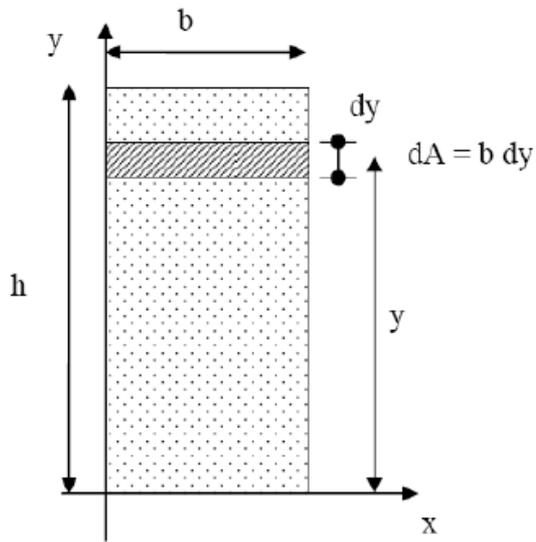
**dal teorema di Varignon si ottengono le coordinate del baricentro**

$$x_o = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_i a_i x_i}{A} \quad y_o = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_i a_i y_i}{A}$$

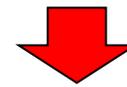
# GEOMETRIA DELLE AREE

## Momento Statico di un rettangolo

Per il rettangolo di base **b** ed altezza **h** valutiamo il momento Statico rispetto all'asse **x** considerando le aree infinitesimali  $dA = b \cdot dy$

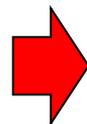


Il momento statico dell'area elementare  $dA$  rispetto all'asse  $x$  è dato dal prodotto dell'area  $dA$  per la sua distanza dall'asse  $y$



$$S_x = \int_0^h y \, dA = \int_0^h b \, y \, dy = b \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^h = \frac{b h^2}{2}$$

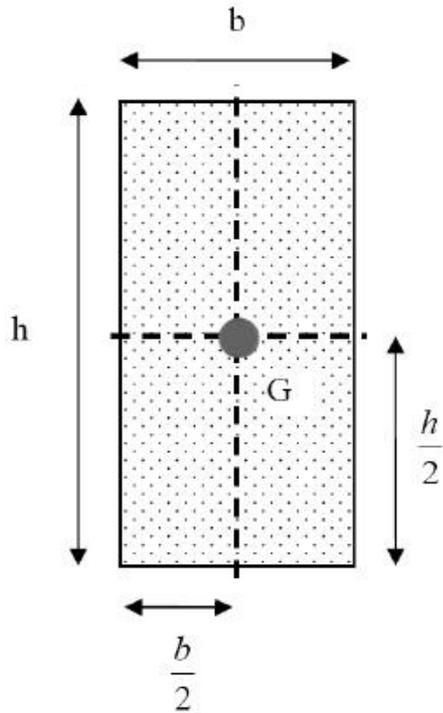
Rispetto all'asse  $y$



$$S_y = \int_0^b x \, dA = \int_0^b h \, x \, dx = h \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^b = \frac{h b^2}{2}$$

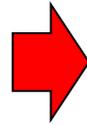
# GEOMETRIA DELLE AREE

Ricordando il teorema di **Varignon**, la posizione del baricentro si può determinare dividendo il momento statico per l'area della figura geometrica:



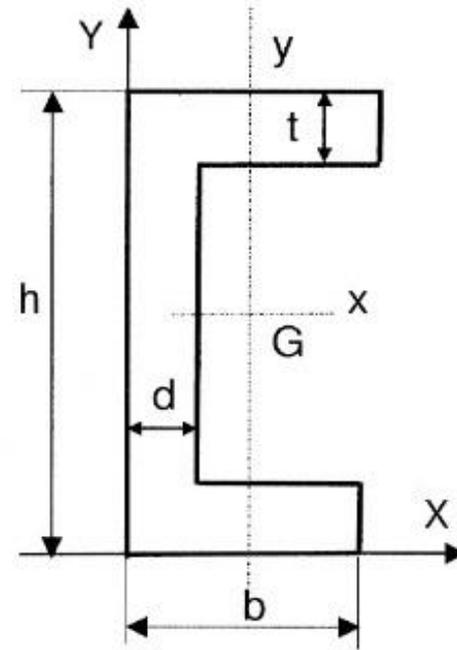
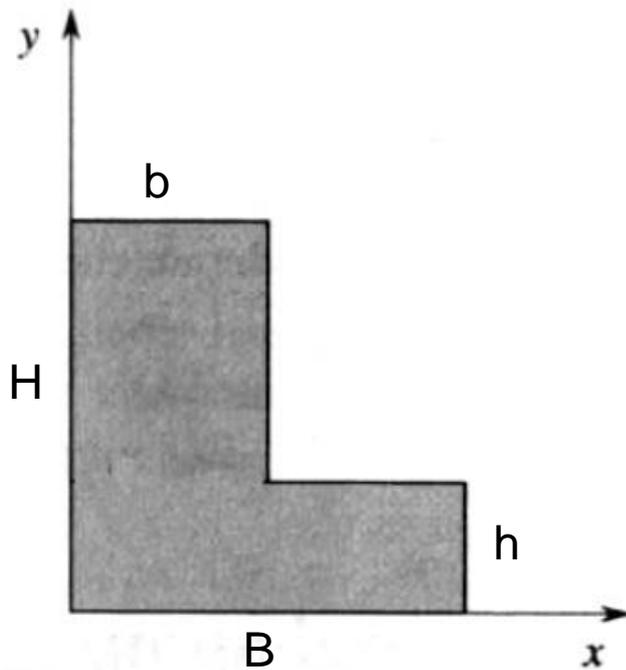
$$y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{b h^2}{2}}{b h} = \frac{h}{2}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{\frac{h b^2}{2}}{b h} = \frac{b}{2}$$



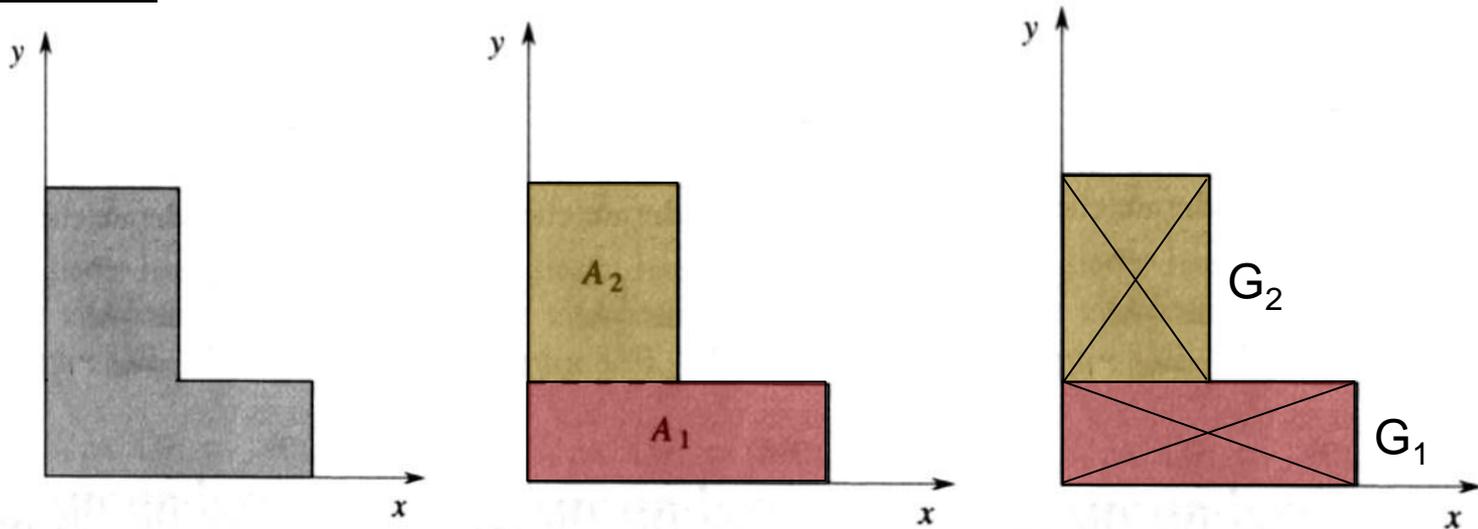
Si noti che se il sistema di riferimento x-y ha come origine il baricentro **G**, i momenti statici risulteranno nulli (**infatti il baricentro G dovrà avere coordinate  $x=0$  e  $y=0$** ).

# *IL MOMENTO STATICO DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE*



# SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Si vogliono determinare i momenti statici (e quindi la posizione del baricentro) di sezioni di forma complessa di area **A**, ma scomponibili in una serie di figure elementari **A1, A2, ...An** delle quali sono note le posizioni dei baricentri:



si può sfruttare la seguente proprietà:

$$S_x = \int_A y \cdot dA = \int_{A_1} y \cdot dA_1 + \int_{A_2} y \cdot dA_2 + \dots + \int_{A_n} y \cdot dA_n$$

# SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

In questo caso si può anche scrivere come:

$$S_x = A_1 \cdot y_{G_1} + A_2 \cdot y_{G_2} + \dots + A_n \cdot y_{G_n} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}$$

Avendo indicato con  $\mathbf{A}_i$  e  $\mathbf{y}_{G_i}$  le aree e le ordinate rispetto all'asse  $\mathbf{x}$  dei baricentri delle singole aree elementari.

Analogamente per il momento statico rispetto all'asse  $\mathbf{y}$

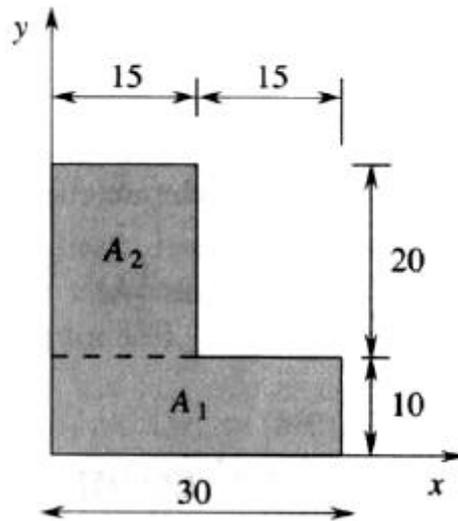
$$S_y = A_1 \cdot x_{G_1} + A_2 \cdot x_{G_2} + \dots + A_n \cdot x_{G_n} = \sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}$$

La posizione del **baricentro** della sezione di area  $\mathbf{A}$  si calcola dunque mediante le relazioni:

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A} \qquad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A}$$

# SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Si vuole determinare la posizione del baricentro della sezione a "L" considerando le dimensioni indicate in figura:



$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A}$$

$$A_1 = 30 \cdot 10 = 300$$

$$x_{G_1} = 15 \quad y_{G_1} = 5$$

$$A_2 = 15 \cdot 20 = 300$$

$$x_{G_2} = 7.5 \quad y_{G_2} = 20$$

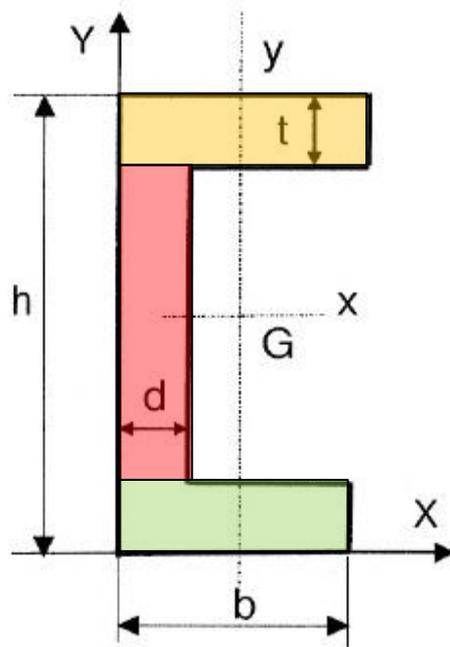
$$A = 300 + 300 = 600$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{G_1} + A_2 \cdot x_{G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{300 \cdot 15 + 300 \cdot 7.5}{300 + 300} = 11.25$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{G_1} + A_2 \cdot y_{G_2}}{A_1 + A_2} = \frac{300 \cdot 5 + 300 \cdot 20}{300 + 300} = 12.5$$

# SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Si vuole determinare la **posizione del baricentro** della sezione a "C" considerando le dimensioni indicate in figura:



d=8 mm  
t=20  
b=100  
h=160

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A}$$

$$A_1 = (100 \cdot 20) = 2000 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = d \cdot (h - 2 \cdot t) = 8 \cdot (160 - 2 \cdot 20) = 8 \cdot 120 = 960 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = (100 \cdot 20) = 2000 \text{ mm}^2$$

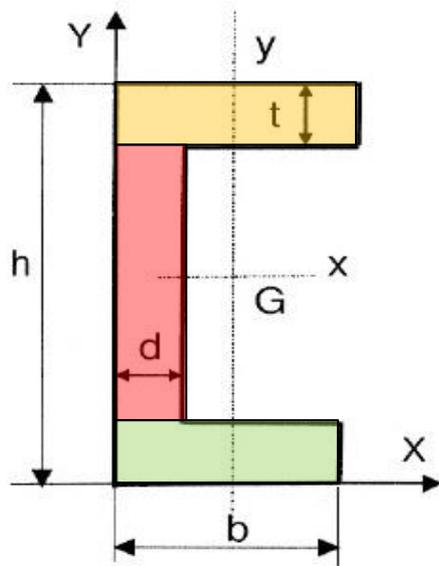
$$A = 2000 + 960 + 2000 = 4960 \text{ mm}^2$$

# SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

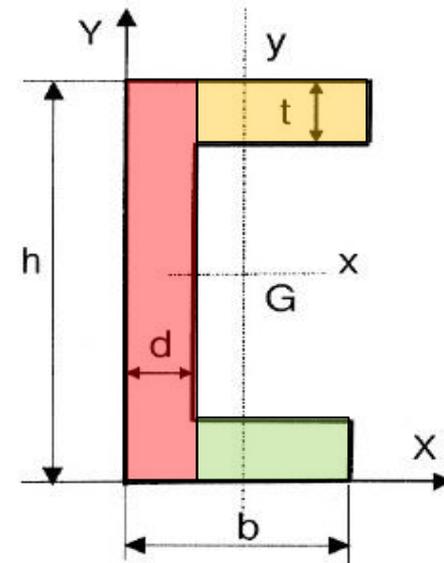
$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot x_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot x_{G_1} + A_2 \cdot x_{G_2} + A_3 \cdot x_{G_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2000 \cdot 50 + 960 \cdot 4 + 2000 \cdot 50}{2000 + 960 + 2000} = 41.10 \text{ mm}$$

$$y_G = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{G_i}}{A} = \frac{A_1 \cdot y_{G_1} + A_2 \cdot y_{G_2} + A_3 \cdot y_{G_3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{2000 \cdot 150 + 960 \cdot 80 + 2000 \cdot 10}{2000 + 960 + 2000} = 80 \text{ mm}$$

$$S_y = x_G \cdot A \Rightarrow S_y = 41.1 \cdot 4960 = 203856 \text{ mm}^3$$

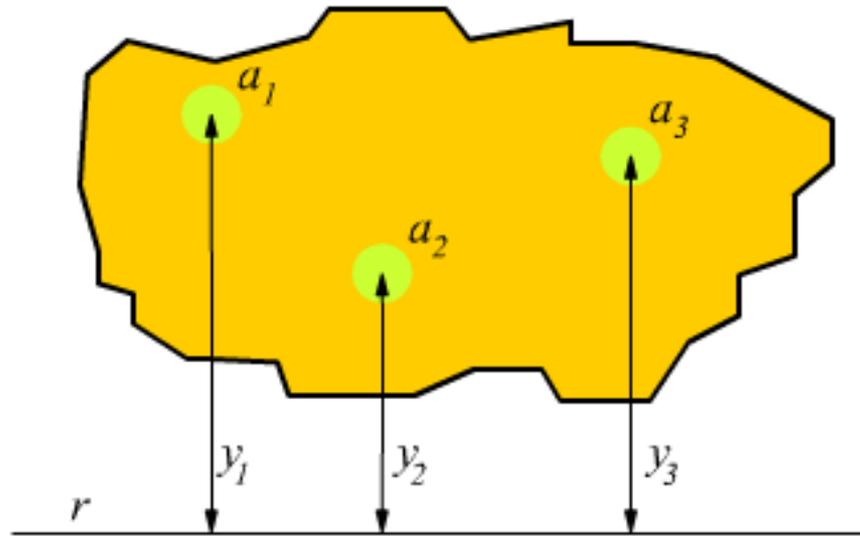


soluzioni  
equivalenti



## Momento di INERZIA (o di secondo ordine)

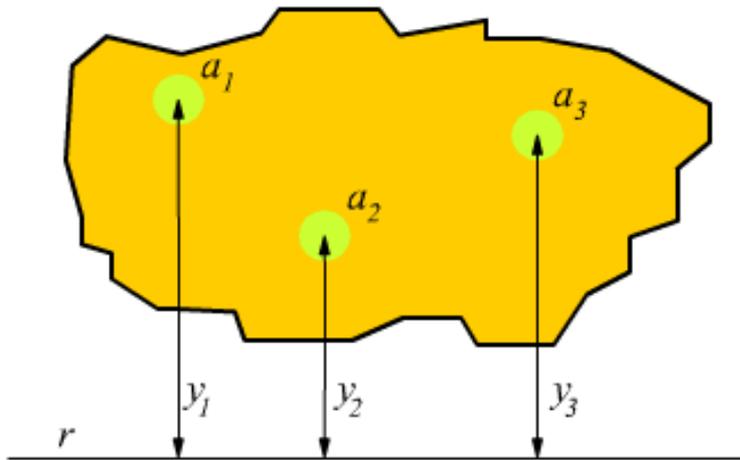
Ipotizziamo una generica superficie di area  $A$  e supponiamo che questa possa essere suddivisa in tante piccole aree elementari  $a_i$



ipotizziamo, inoltre, una retta  $r$  complanare con la superficie data.

# GEOMETRIA DELLE AREE

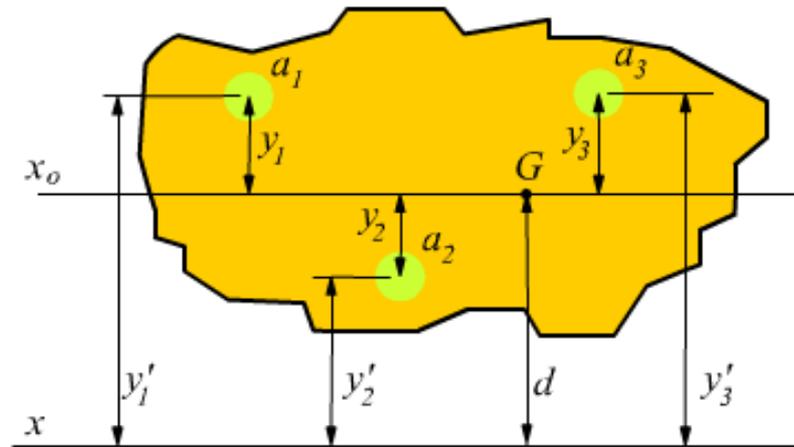
Viene definito **momento di inerzia I** della superficie, rispetto alla retta (**r**) assegnata, la sommatoria dei prodotti delle singole aree elementari **a<sub>i</sub>** per i quadrati delle rispettive distanze **y<sub>i</sub>** dalla retta **r**



$$I = \sum_i a_i y_i^2 \quad [L^4]$$

# GEOMETRIA DELLE AREE

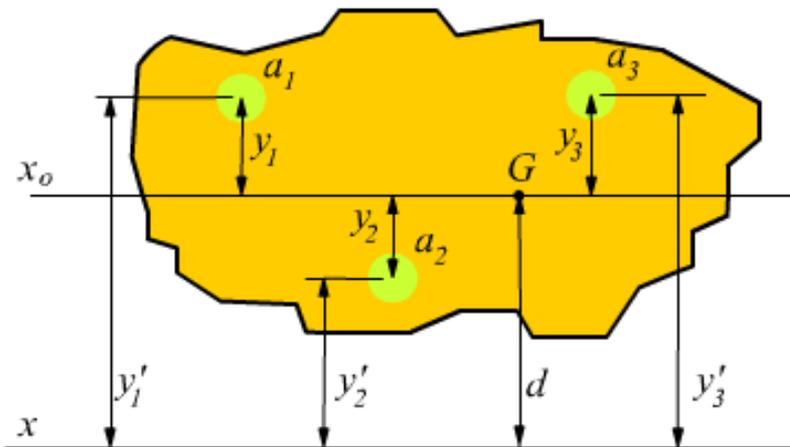
Consideriamo una superficie generica  $A$  di cui sia nota la posizione del baricentro  $G$  e sia  $I_{x_0}$  il momento di inerzia calcolato già in precedenza rispetto ad una retta  $x_0$  passante per il baricentro



Come otteniamo il momento di inerzia  $I_x$  della superficie rispetto ad una retta  $x$  parallela ad  $x_0$  e distante  $d$  da essa?

# GEOMETRIA DELLE AREE

Applichiamo il **teorema Huygens di trasposizione**:  
*il momento di inerzia rispetto ad un asse generico  $x$  è uguale al momento di inerzia rispetto ad un asse baricentrico  $x_0$  e parallelo al primo sommato al prodotto dell'area per la distanza  $d$ , tra i due assi, elevata al quadrato.*



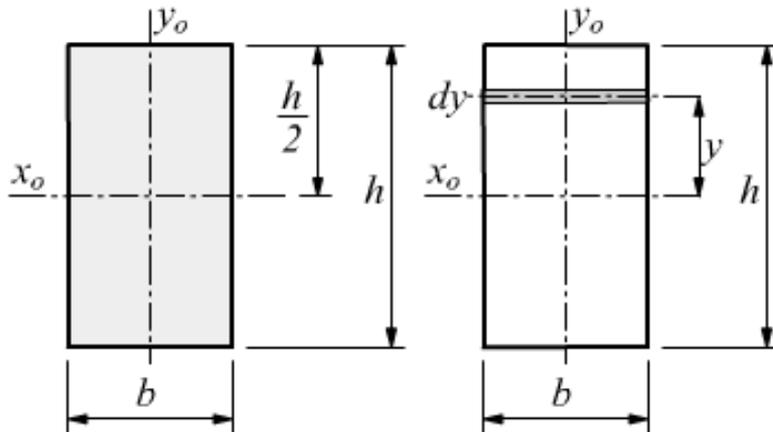
$$I_x = I_{x_0} + Ad^2$$

**Teorema di Huygens  
di trasposizione**

# GEOMETRIA DELLE AREE

## Momento di Inerzia di un rettangolo

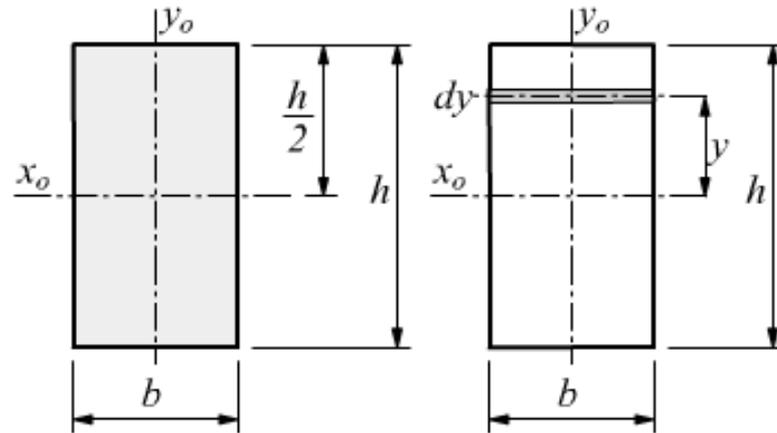
Per un rettangolo di base **b** ed altezza **h** il momento di inerzia rispetto all'asse baricentrico  $x_o$  parallelo alla base è



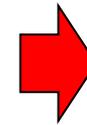
$$I_{x_o} = \sum_i a_i y_i^2$$

passando al calcolo differenziale possiamo pensare di porre l'area  $a_i$  in termini infinitesimi come  $a_i = b \cdot dy$

# GEOMETRIA DELLE AREE

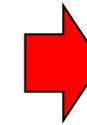


$$J_{x_o} = \int_{-h/2}^{h/2} b \cdot y^2 dy = \left[ \frac{1}{3} b y^3 \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{3} b \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^3 - \left( -\frac{h}{2} \right)^3 \right]$$



$$J_{x_o} = \frac{bh^3}{12}$$

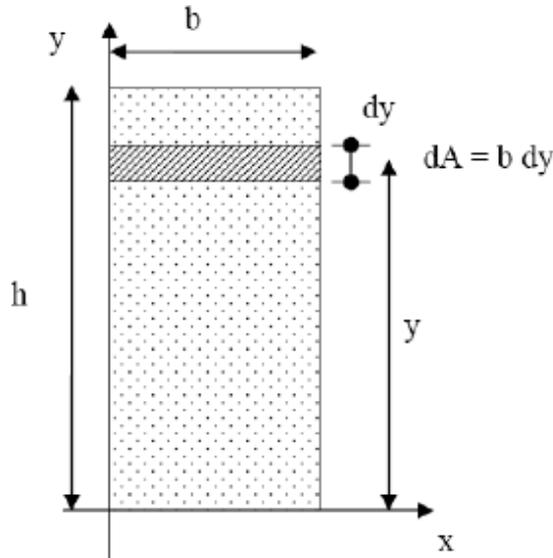
Se ci si riferisce all'asse verticale baricentrico  $y_o$  basta pensare di ribaltare il rettangolo applicando ad esso lo stesso procedimento scambiando le due dimensioni  $b$  ed  $h$ .



$$J_{y_o} = \frac{hb^3}{12}$$

# GEOMETRIA DELLE AREE

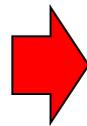
Supponiamo ora di voler valutare il momento di inerzia rispetto all'asse  $x$  passante per la base del rettangolo



$$I_x = \int_0^h y^2 \cdot dA = \int_0^h y^2 \cdot b \, dy = \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^h \cdot b = \frac{bh^3}{3}$$

Applichiamo il teorema di trasporto per trovare  $I_x$  a partire da  $I_{x_0}$

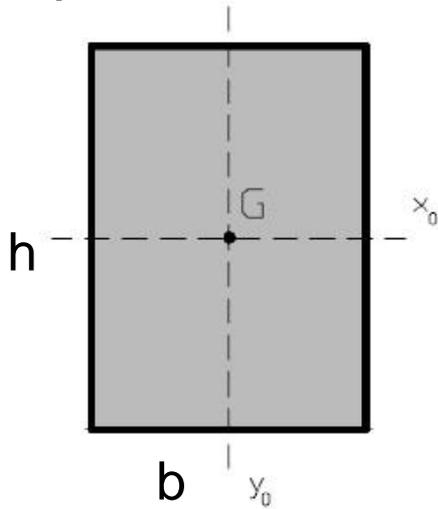
$$I_x = I_{x_0} + Ad^2$$



$$I_x = I_{x_0} + bh \left[ \frac{h}{2} \right]^2 = \frac{bh^3}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

# GEOMETRIA DELLE AREE

Va specificato che gli assi  $x_0$  e  $y_0$  baricentrici sono anche “**assi principali di inerzia**”. Infatti, un asse baricentrico è asse principale di inerzia quando il momento di inerzia rispetto ad esso è massimo oppure minimo.



$$J_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$$

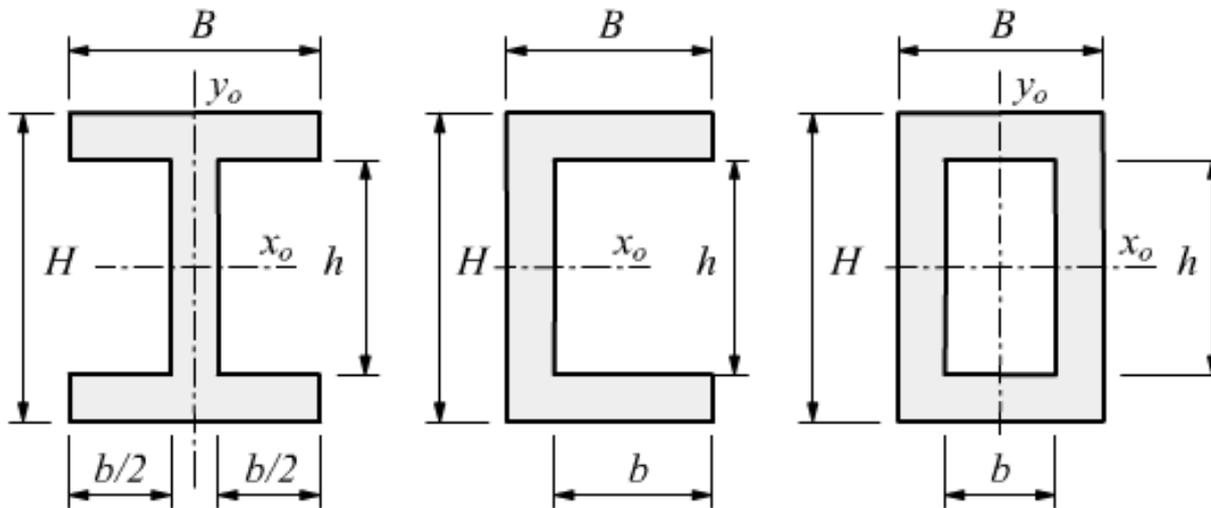
**max**

$$J_{y_0} = \frac{hb^3}{12}$$

**min**

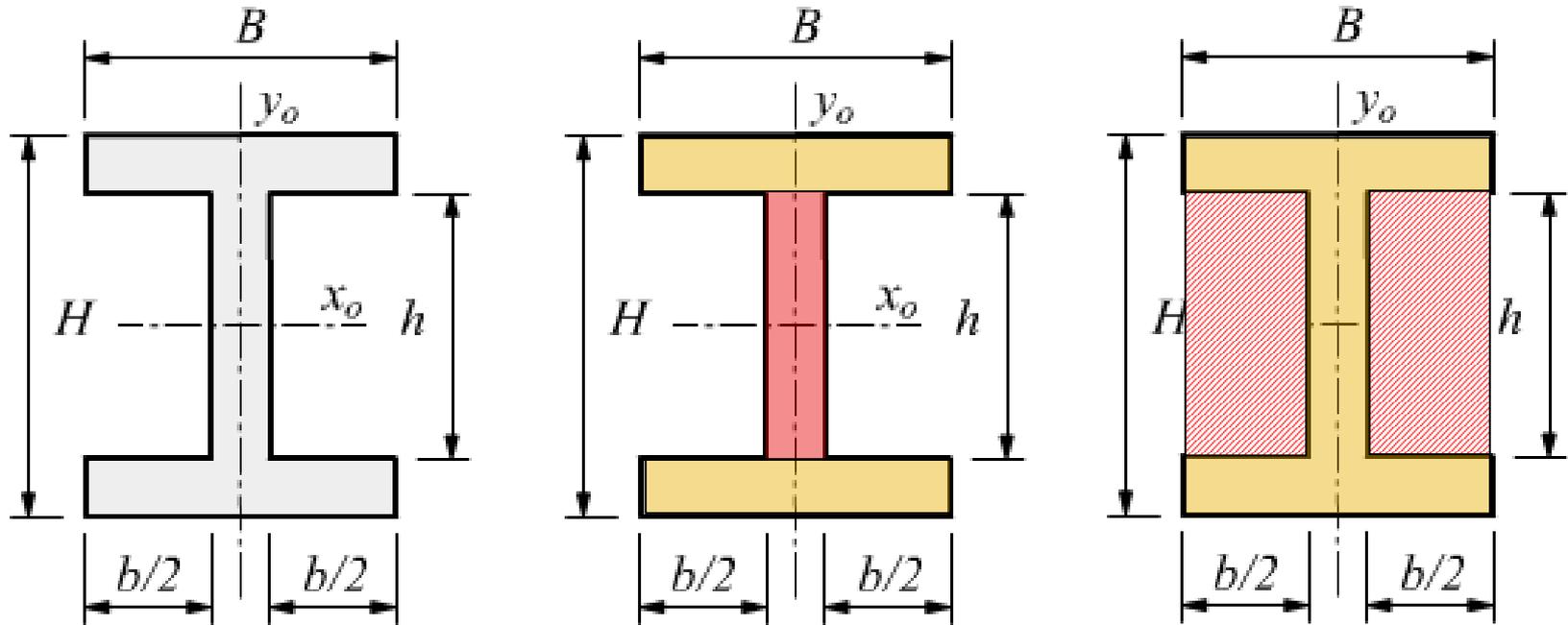
Nel caso del rettangolo  $I_{x_0}$  è il momento di inerzia massimo e  $I_{y_0}$  rappresenta il momento di inerzia minimo. **Per una sezione doppiamente simmetrica, quindi, gli assi di simmetria sono anche assi principali di inerzia.**

# IL MOMENTO DI INERZIA DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE



# SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

Si vogliono calcolare i momenti di inerzia lungo i due assi baricentrici di una sezione a “doppio T”:



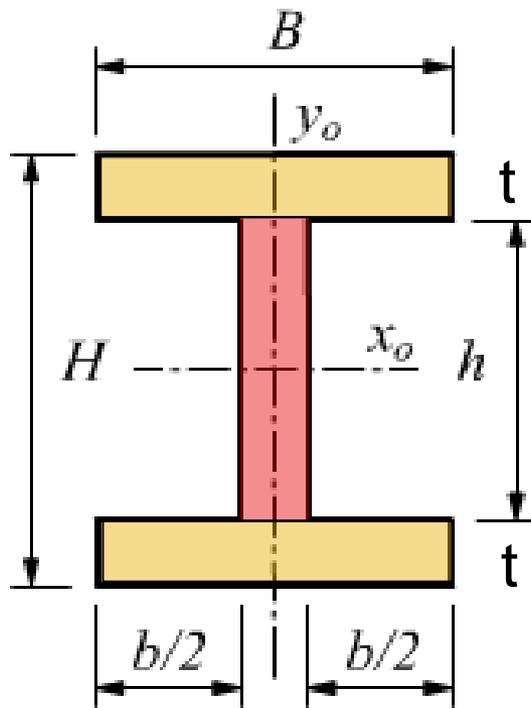
**Soluzione 1**

**Soluzione 2**

E' possibile individuare due assi di simmetria ( $x_0, y_0$ ) e dunque il loro punto di intersezione (**G**) è il baricentro.

# SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

## Soluzione 1



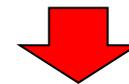
$$t = (H - h) / 2$$

Il momento di inerzia della sezione rispetto ad  $x_0$  può essere calcolato come **somma** dei momenti di inerzia di figure elementari:

$$I_{x_0} = I_{1,x_0} + 2 \cdot I_{2,x_0}$$

$$I_{1,x_0} = b/12 \cdot h^3$$

$$I_{2,x_0} = B/12 \cdot t^3 + (B \cdot t) \cdot (h/2 + t/2)^2$$

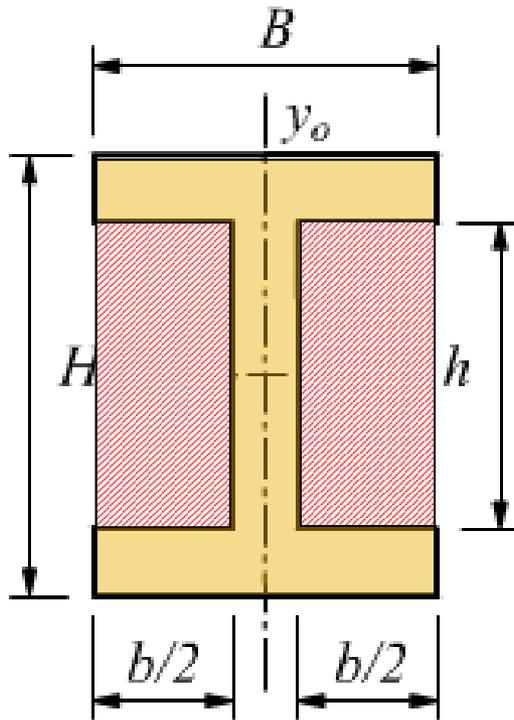


$$I_{x_0} = b/12 \cdot h^3 + B/6 \cdot t^3 + 2 \cdot (B \cdot t) \cdot (h/2 + t/2)^2$$

# SOLUZIONE DI SEZIONI OMOGENEE COMPLESSE

## Soluzione 2

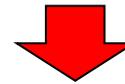
Il momento di inerzia della sezione rispetto ad  $x_0$  può essere calcolato come **differenza** tra i momenti di inerzia di figure elementari:



$$I_{x_0} = I_{1,x_0} - 2 \cdot I_{2,x_0}$$

$$I_{1,x_0} = B/12 \cdot H^3$$

$$I_{2,x_0} = (b/2)/12 \cdot h^3$$



$$I_{x_0} = B/12 \cdot H^3 - b/12 \cdot h^3$$

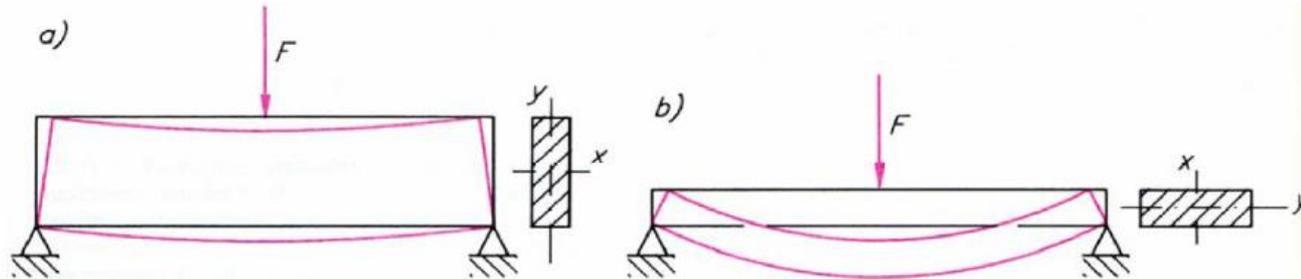
---

# CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

# CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

È bene sottolineare che i **momenti d'inerzia** assumono un significato fisico più interessante, dal punto di vista statico, del puro e semplice significato geometrico.

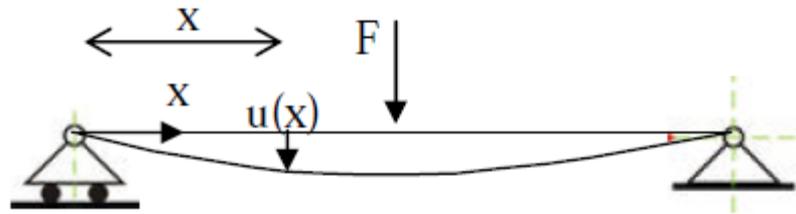
L'esperienza insegna che una trave (di legno o di acciaio o di altro materiale) si inflette (**deforma**) in maniera diversa a seconda di come viene disposta sotto un carico:



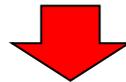
A parità di materiale impiegato, elementi strutturali con sezioni piane di forma e dimensioni diverse, cioè con diverso momento d'inerzia, **hanno diverse capacità di resistenza alle sollecitazioni**.

# CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

Il calcolo della deformata di una trave corrisponde a trovare una funzione  $u(x)$  che rappresenta lo spostamento della trave ad una generica distanza  $x$  dall'origine del sistema di riferimento (**posizione indeformata**).



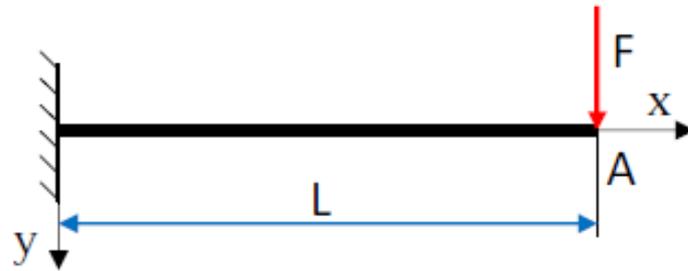
Nell'esempio dunque  $u(x)$  definisce l'**abbassamento** in ogni sezione della trave provocato da una forza concentrata  $F$ .



Il calcolo della deformata, estesa a tutta la trave, presuppone l'applicazione della **teoria della linea elastica**

# CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

La trave a mensola ha sezione trasversale costante e porta un carico  $F$  nella sua estremità libera  $A$ . Si vuole determinare, sfruttando la teoria della linea elastica, lo spostamento e la rotazione in  $A$ :



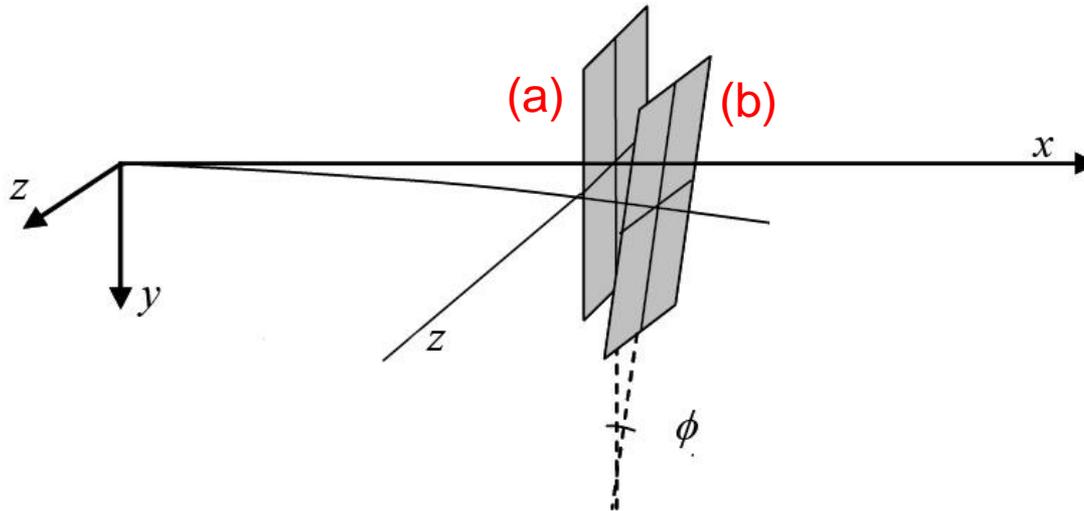
Ricordiamo l'equazione differenziale della linea elastica:

$$E \cdot J_z \cdot \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -M(x)$$

l'asse  $x$  coincide con l'asse della trave, lo spostamento  $v_x$  è orientato come l'asse  $y$  mentre l'asse  $z$  è orizzontale. Si definisce **rigidezza flessionale** il prodotto  $EJ$ .

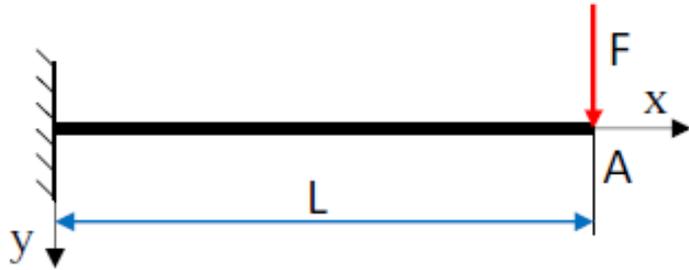
# CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

Nella figura successiva è rappresentata una sezione della trave sia in **condizioni indeformate (a)** che in **condizioni deformate (b)** dopo l'applicazione di un carico.



Si vede che la rotazione della sezione ( $\Phi$ ) avviene attorno ad un asse parallelo all'asse **z**. In questo caso quindi, il momento di inerzia da tenere in conto nel calcolo della rigidezza flessionale deve essere quello **baricentrico rispetto all'asse z**.

# CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI



*Equazione del momento flettente*

$$M(x) = F \cdot (x - L)$$

Integrando una prima volta l'equazione della linea elastica otteniamo:

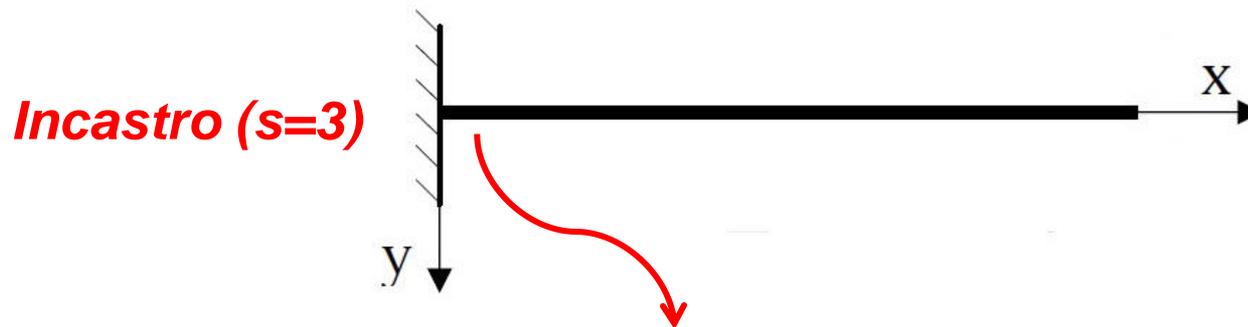
$$E \cdot J_z \cdot \frac{dv(x)}{dx} = E \cdot J_z \cdot \vartheta(x) = -F \cdot \int (x - L) \cdot dx = -F \cdot \left( \frac{x^2}{2} - L \cdot x + c_1 \right)$$

Integrando una seconda volta otteniamo:

$$E \cdot J_z \cdot v(x) = \int -F \cdot \left( \frac{x^2}{2} - L \cdot x + c_1 \right) \cdot dx = -F \cdot \left( \frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2} + c_1 \cdot x + c_2 \right)$$

# CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

Le condizioni al contorno sono le seguenti:



a) Per $x = 0$	$y(0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$
b) Per $x = 0$	$\vartheta(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

Di conseguenza l'equazione della linea elastica è:

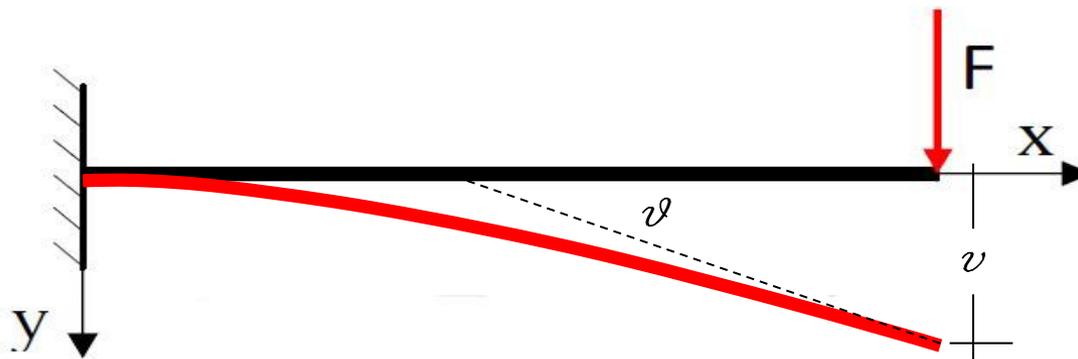
$$v(x) = \frac{-F \cdot \left( \frac{x^3}{6} - L \cdot \frac{x^2}{2} \right)}{E \cdot J_z} = \frac{-F \cdot x^2 \cdot (x - 3 \cdot L)}{6 \cdot E \cdot J_z}$$

# CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

In corrispondenza dell'estremo libero lo spostamento (**freccia**) e la **rotazione** valgono:

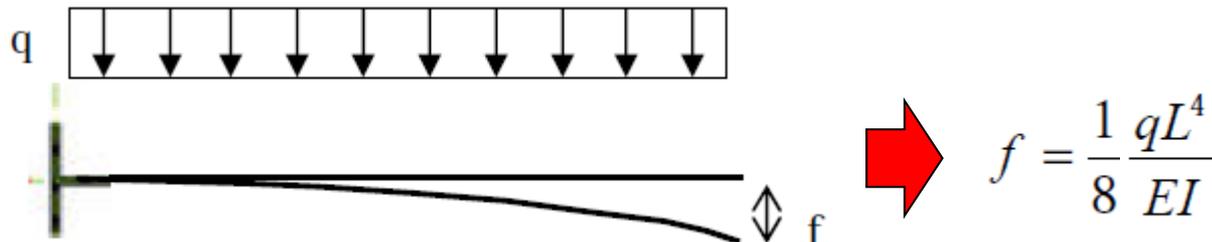
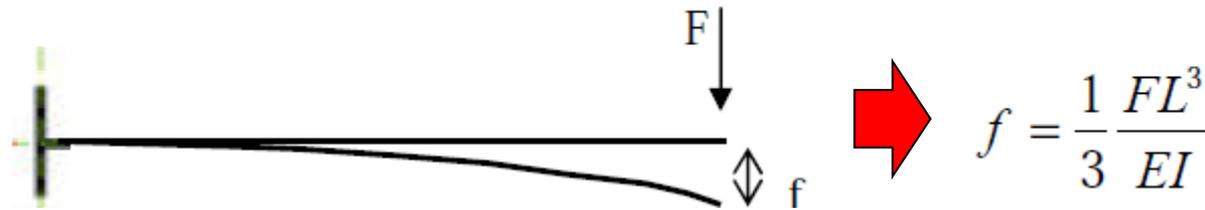
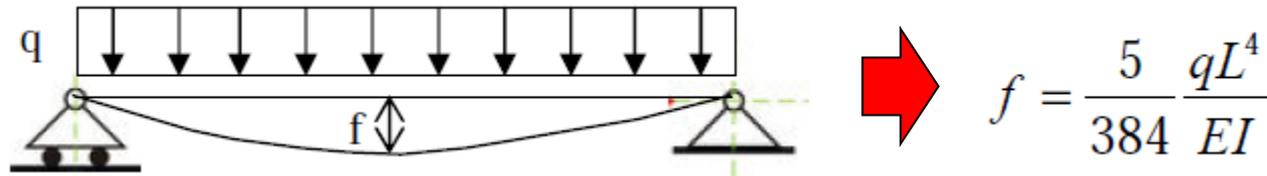
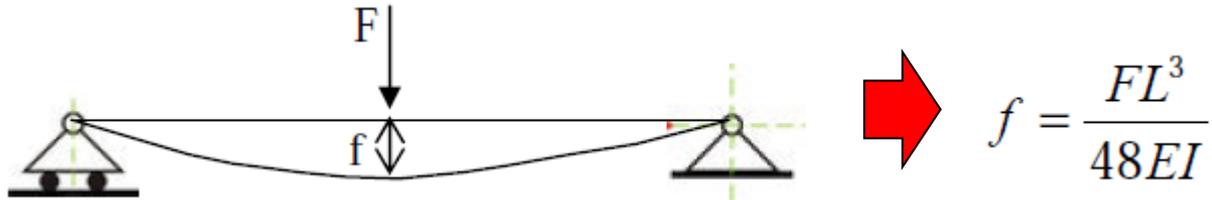
$$v(x = L) = \frac{-F \cdot \left( \frac{L^3}{6} - L \cdot \frac{L^2}{2} \right)}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot J_z}$$

$$\vartheta(x = L) = \frac{-F \cdot \left( \frac{L^2}{2} - L \cdot L \right)}{E \cdot J_z} = \frac{F \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J_z}$$



# CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI

Valori della freccia ( $f$ ) per alcuni schemi isostatici:

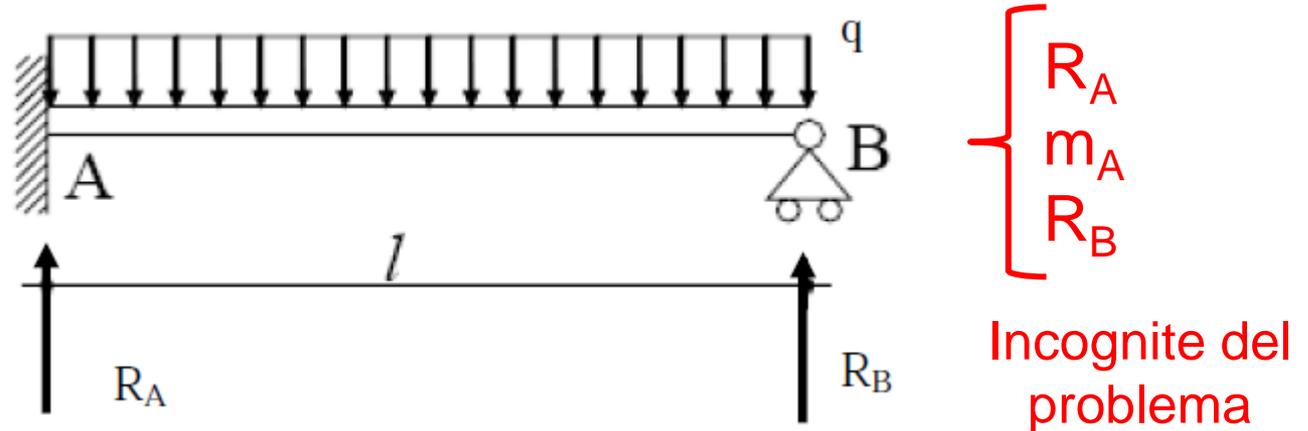


---

# SISTEMI IPERSTATICI

# SISTEMI IPERSTATICI

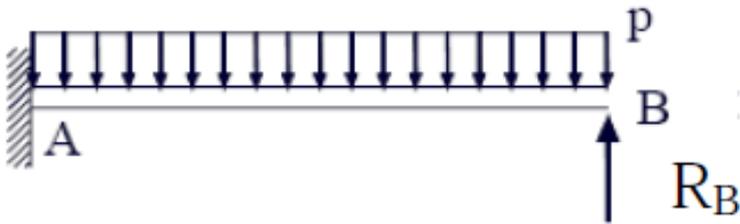
Si consideri la trave in figura. Essa è una volta iperstatica infatti  $3t-s = 3-4=-1$  (l'incastro elimina 3 g.d.l. e il carrello ne elimina uno).



Non è possibile calcolare le reazioni vincolari sulla base di sole condizioni di equilibrio, ossia applicando direttamente le equazioni cardinali della statica, in quanto il numero di incognite (**3**) è maggiore del numero di equazioni di equilibrio a disposizione (**2**).

# SISTEMI IPERSTATICI

Sarà pertanto necessario considerare anche le **equazioni di congruenza** utilizzando il metodo delle forze (si sostituiscono i vincoli sovrabbondanti con le rispettive reazioni vincolari).

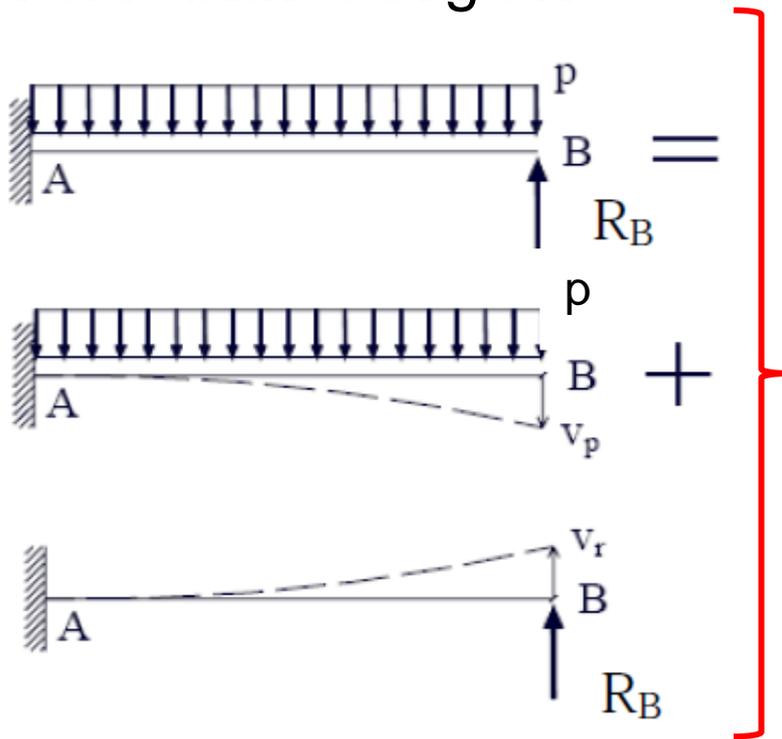


Il carrello in **B** è sostituito con la corrispondente reazione vincolare  $R_{yB}$ , assunta come incognita iperstatica.

Sul sistema isostatico agiscono il carico **p** (noto) e la forza **R<sub>B</sub>** (incognito).

# SISTEMI IPERSTATICI

Tramite il **principio di sovrapposizione degli effetti**, la mensola può essere considerata come il risultato della somma di due mensole diversamente caricate: la prima con il carico distribuito noto, la seconda con il carico concentrato incognito.



Per la congruenza con il vincolo in **B**

$$V_p + V_r = 0$$

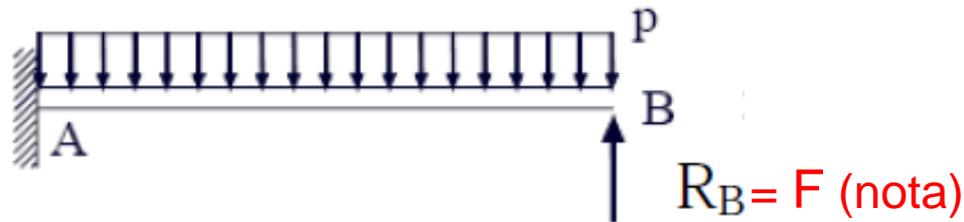
$$V_p = \frac{1}{8} \frac{qL^4}{EI} \quad \text{positivo}$$

$$V_r = \frac{R_B l^3}{3EI} \quad \text{negativo}$$

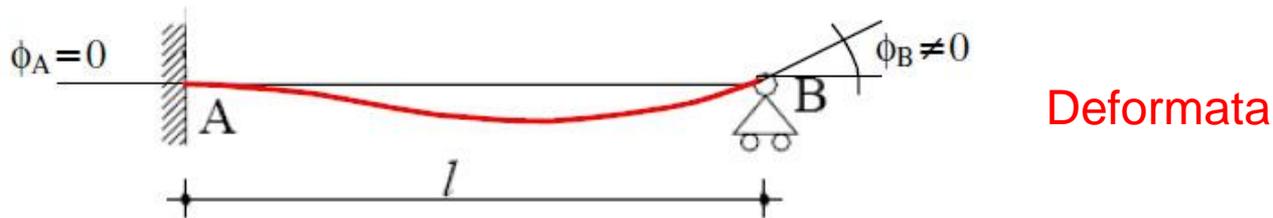
Risolvendo  $R_B = \frac{3}{8} ql$

# SISTEMI IPERSTATICI

Nota la reazione vincolare si ritorna di fatto ad un sistema isostatico (**trave semplicemente incastrata**) sul quale agiscono un carico uniformemente distribuito ( $p$ ) ed una forza concentrata ( $F = R_B$ ).

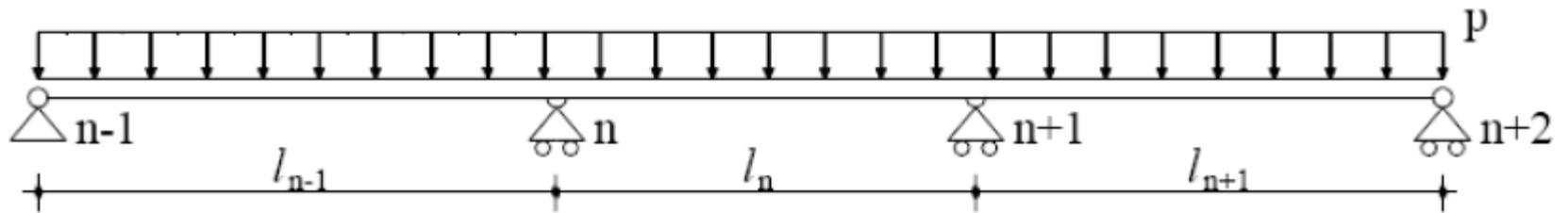


Si possono così ricavare le altre reazioni vincolari ( $R_A, m_A$ ) e le sollecitazioni interne ( $M, V$ ) applicando la sovrapposizione degli effetti causati dai due carichi ( $q, F$ ).

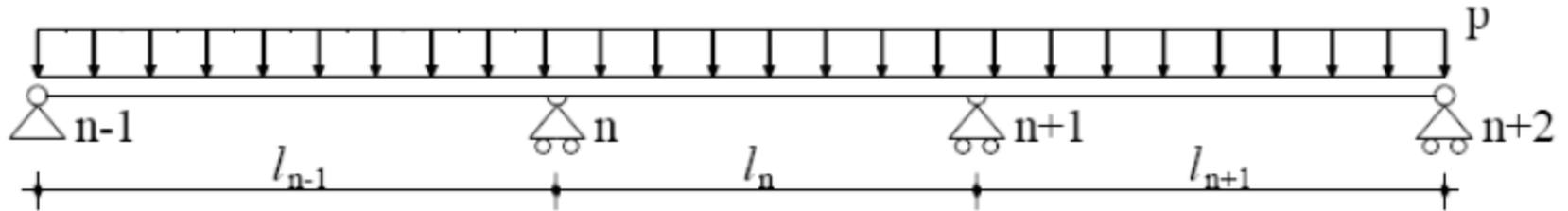


# *SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE*

## TRAVE CONTINUA SU PIÙ APPOGGI



# SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE



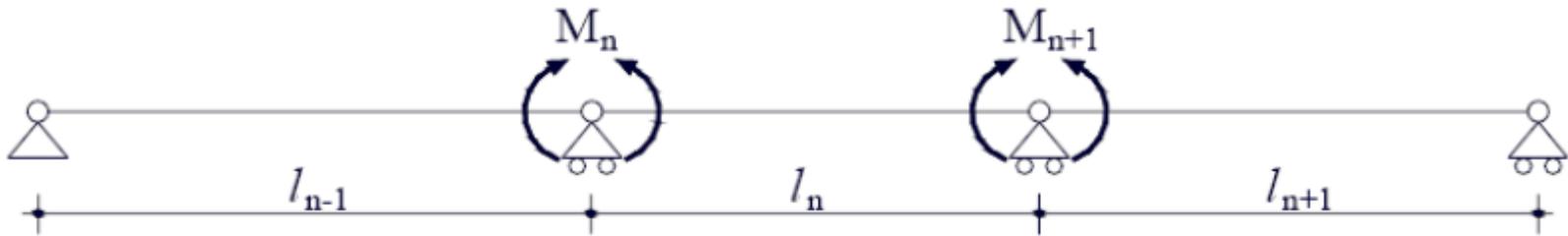
La trave è caratterizzata da **4** appoggi e **3** campate (per campata intendiamo quella parte dell'intera trave compresa tra 2 appoggi).

Il grado di iperstaticità vale  **$3t-s = 3-5=-2$** , quindi la trave è **2 volte iperstatica**.

Infatti eliminando i due carrelli centrali la trave sarebbe ancora isostatica.

# SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

In questo caso conviene assumere come **incognite iperstatiche** i valori dei momenti che si sviluppano in corrispondenza dei due carrelli centrali.

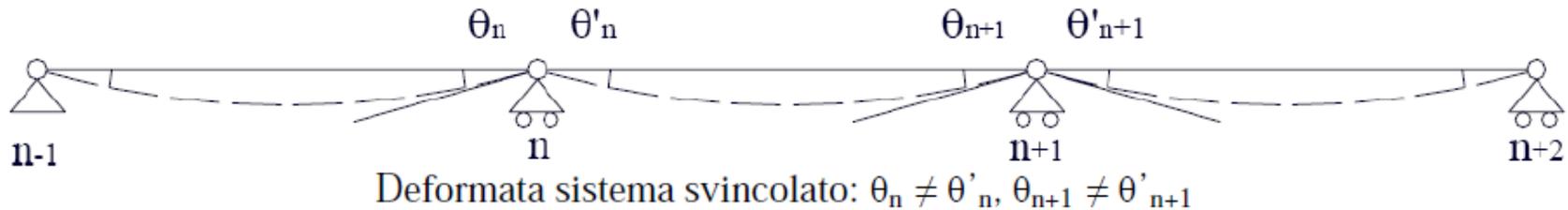


Si interrompe, quindi, la continuità della trave introducendo **due cerniere in corrispondenza degli appoggi** e si ripristina il sistema statico iniziale applicando in questi nodi le reazioni corrispondenti ai vincoli eliminati.

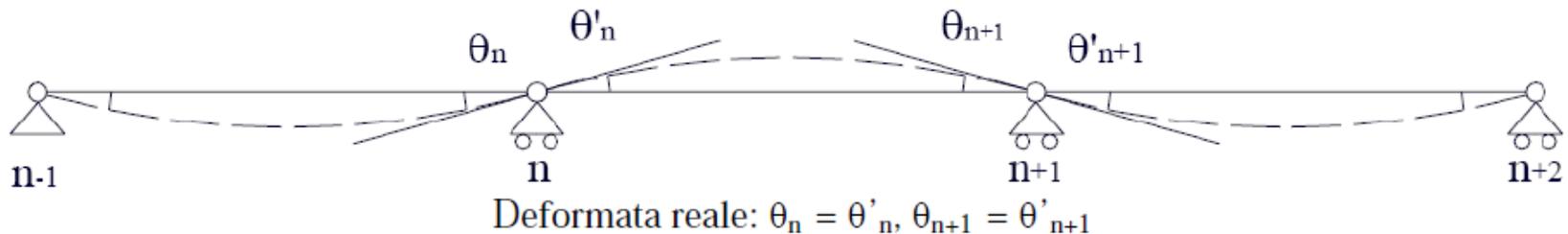
Le reazioni vincolari  $M_n$  ed  $M_{n+1}$  devono essere tali da **garantire la congruenza** degli spostamenti negli appoggi.

# SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

L'introduzione delle cerniere permetterebbe, in teoria, a due tronchi di trave contigui di ruotare liberamente l'uno rispetto all'altro:



Nel sistema reale invece gli stessi tronchi di trave sono collegati attraverso un vincolo di continuità che impone l'uguaglianza delle rotazioni a sinistra e a destra del vincolo:

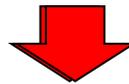


# SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

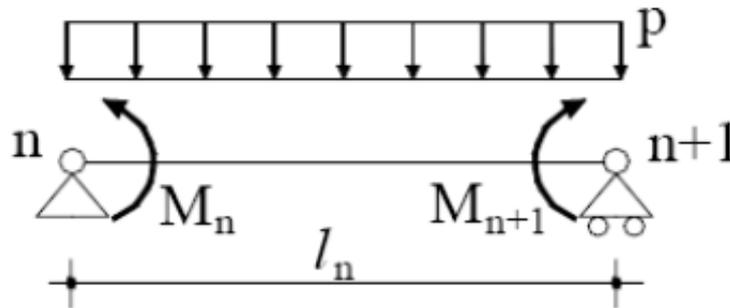
Pertanto, per la congruenza, si deve avere:

$$\theta_n = \theta'_n \quad \theta_{n+1} = \theta'_{n+1}$$

Le due **equazioni di congruenza**, sommate alle **equazioni di equilibrio** consentono di risolvere il problema 2 volte iperstatico.

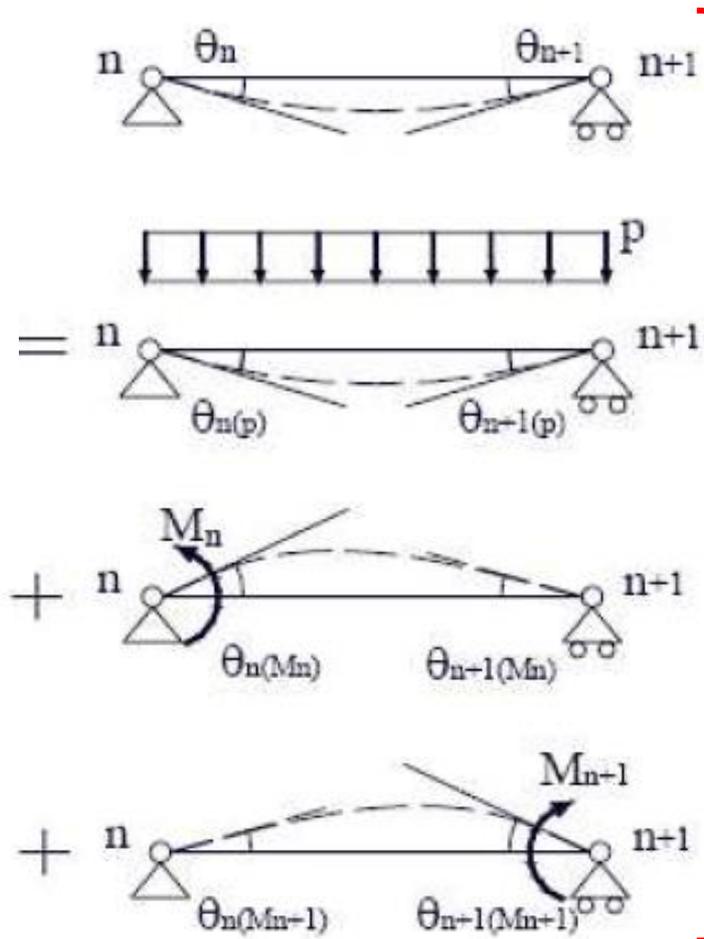


Sulla singola campata resa isostatica si avrà il seguente **sistema** detto **isostatico equivalente**:



# SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

Tale sistema può essere visto come somma di tre singoli sistemi su cui agiscono singolarmente i diversi carichi:



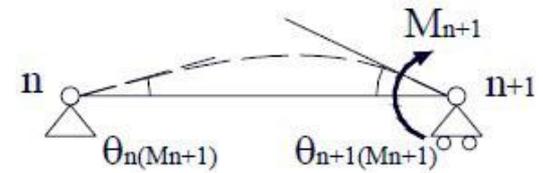
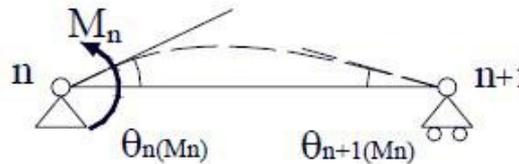
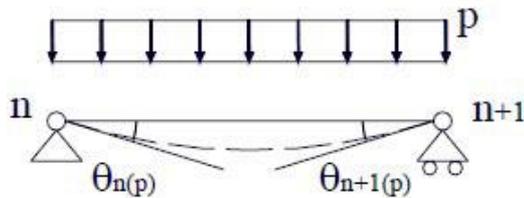
Le rotazioni in  $n$  ed  $n+1$  valgono

$$\theta_n = \theta_{n(p)} + \theta_{n(M_n)} + \theta_{n(M_{n+1})}$$

$$\theta_{n+1} = \theta_{n+1(p)} + \theta_{n+1(M_n)} + \theta_{n+1(M_{n+1})}$$

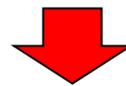
# SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

Tramite la teoria della **linea elastica** e considerando per tutta la trave  **$EJ=costante$** , si ricavano i singoli addendi che definiscono le rotazioni in **n** ed **n+1**.



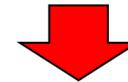
$$\theta_{n(p)} = -\frac{l_n^3}{24E_n J_n} p$$

$$\theta_{n+1(p)} = \frac{l_n^3}{24E_n J_n} p$$



$$\theta_{n(Mn)} = \frac{l_n}{3E_n J_n} M_n$$

$$\theta_{n+1(Mn)} = -\frac{l_n}{6E_n J_n} M_n$$



$$\theta_{n(Mn+1)} = \frac{l_n}{6E_n J_n} M_{n+1}$$

$$\theta_{n+1(Mn+1)} = -\frac{l_n}{3E_n J_n} M_{n+1}$$

le rotazioni sono considerate positive se antiorarie

# SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

Applicando la congruenza all'appoggio  $n$  si ha:

$$\theta_n = \theta'_n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_n = \theta_{n(p)} + \theta_{n(Mn)} \\ \theta'_n = \theta_{n(p)} + \theta_{n(Mn)} + \theta_{n(Mn+1)} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_n = \frac{pl_{n-1}^3}{24EJ} + \frac{M_n l_{n-1}}{3EJ} \text{ rotazione a sinistra} \\ \vartheta'_n = -\frac{pl_n^3}{24EJ} - \frac{M_n l_n}{3EJ} - \frac{M_{n+1} l_n}{6EJ} \text{ rotazione a destra} \end{array} \right.$$

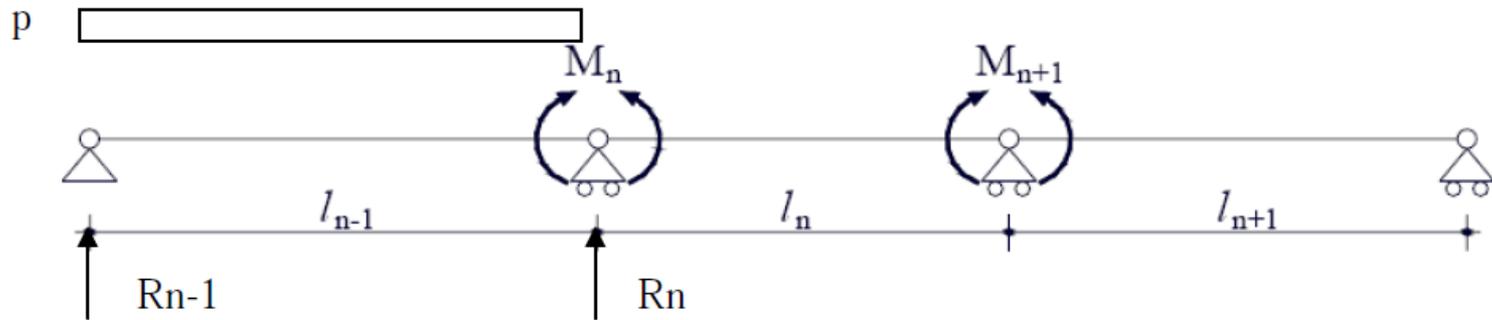
Eguagliando i due termini

$$\frac{pl_{n-1}^3}{24EJ} + \frac{pl_n^3}{24EJ} = -\frac{M_n l_{n-1}}{3EJ} - \frac{M_{n+1} l_n}{6EJ} - \frac{M_n l_n}{3EJ}$$

Prima equazione  
di congruenza

# SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

In maniera analoga si scrive l'equazione di congruenza per l'appoggio successivo ( $n+1$ ) e dunque risolvere il sistema di equazioni nelle due incognite  $M_n$  e  $M_{n+1}$



Le **reazioni vincolari** e le **caratteristiche della sollecitazione** in tutte le campate si ricavano facendo riferimento agli schemi isostatici su cui agiscono il carico distribuito ed i momenti appena calcolati.

# SOLUZIONI DI TRAVI IPERSTATICHE

Imponendo l'equilibrio del tratto  $l_{n-1}$  si ha

$$R_{n-1} + R_n - p \cdot l_{n-1} = 0 \quad \text{traslazione verticale}$$

$$-R_{n-1} \cdot l_{n-1} + M_n + p \cdot l_{n-1} / 2 = 0 \quad \text{rotazione attorno all'appoggio } n$$

